数理経済学
第12回
安定結婚問題の拡張

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

今後の予定

- ７月２９日（金）：期末試験
  - 成績報告は８月８日（月）午後を予定

- ８月９日（火） 期末試験の解説
  - 希望者のみ.　希望者は８月８日までに連絡ください.
  - 西９号館５３１号室にて.
  - 時間：基本的には講義時間. それ以外は応相談.

安定結婚問題の定義

- n人の「男性」(労働者)とn人の「女性」(仕事)のマッチング
- 「男性」は「女性」に対する選好順序をもつ
- 「女性」は「男性」に対する選好順序をもつ
- 駆け落ちする男女のペアが生まれない(安定な)マッチングを求めたい

男A:123	女1:BAC
男B:312	女2:BAC
男C:132	女3:CAB

割当の例:A－1, B－3, C－2

男性Cは現在のパートナー(女性2)より女性3が好き

女性3は現在のパートナー(男性B)より男性Cが好き

⇒ 男性Cと女性3は駆け落ちする(割当は不安定)

ブロッキングペアと安定マッチング

定義: 男女のペア(m, w) は（マッチング Mに関する）
ブロッキングペア（駆け落ちペア）(m,w)
⇔ (i) マッチング M でペアになっていない
(ii) マッチング M での m の相手 < w
(iii) マッチング M での w の相手 < m
定義:Mは安定マッチング⇔Mにブロッキングペアが存在しない

男A:123　　女1:BAC
男B:312　　女2:BAC
男C:132　　女3:CAB

安定な割当の例: A－2, B－1, C－3

定理　安定マッチングは常に存在
受入保留アルゴリズムにより求めることが可能

受入保留アルゴリズムの耐戦略性

定理　（男性プロポーズの）受入保留アルゴリズムにおいて，
各男性は，自分一人が嘘をついても，より良いパートナーを得ることはできない

（証明は省略）

各女性は，自分一人が嘘をついて，より良いパートナーを得ることがあり得る

男A：1 2 3　　女1：B C A
男B：~~2~~ 3 1　　女2：A C B
男C：2 1 3　　女3：A B C

⇒

男A：~~1~~ 2 3　　女1：B C A
男B：~~2~~ 3 1　　女2：A B C
男C：~~2~~ 1 3　　女3：A B C

女2が嘘をつく
➔より良い男とペアになる

安定結婚問題の拡張

- その１：男女数が異なる場合
- その２：独身を許す（パートナーにしたくない異性を考慮）
- その３：同順位を許す
- その４：１対多マッチング（１つの病院に複数の研修医を割り当て）

研修医マッチング問題の定義

- n人の「研修医」をm箇所の「病院」に割り当てる
- 各病院 i には定員 c_i がある（$c_1 + c_2 + \cdots + c_m \geq n$ を仮定）
- 「研修医」は「病院」に対する選好順序をもつ
- 「病院」は「研修医」に対する選好順序をもつ
- 不満をもつ病院・研修医のペアをもたない

安定な割当を求めたい

研修医A：213
研修医B：213
研修医C：123
研修医D：312

病院1（定員2）：ABCD
病院2（定員1）：CBAD
病院3（定員2）：DABC

割当案

病院1：A
病院2：C
病院3：BD

Bさんは病院3より病院1に行きたい
病院1は定員に空きがある
➔不満が生じる

ブロッキングペアと安定割当

定義: 研修医(resident)と病院(hospital)のペア(r, h) は
（割当 A に関する）ブロッキングペア
⇔ (i) 割当 A において，r は h に割り当てられていない
(ii) 割当 A において，r の割当先の病院 < h
(iii) 割当 A において，h に空きがある
または h に割り当てられた最低順位の研修医 < r

定義: Aは安定割当⇔A にブロッキングペアが存在しない

割当案

病院1: A
病院2: C
病院3: BD

Bさんは病院3より病院1に行きたい
病院1は定員に空きがある
➔不満が生じる（ブロッキングペア）

安定割当に関する性質

定理　安定割当は常に存在

- 受入保留アルゴリズムの修正版により求めることが可能
- 研修生からプロポーズ➔「研修生最適」な安定割当
- 病院からプロポーズ➔「病院最適」な安定割当

研修医A：2 1 3
研修医B：2 1 3
研修医C：1 2 3
研修医D：3 1 2

病院1（定員2）：A B C D
病院2（定員1）：C B A D
病院3（定員2）：D A B C

「研修生最適」

研修医A：2 1 3
研修医B：2 1 3
研修医C：1 2 3
研修医D：3 1 2

病院1（定員2）：A B C D
病院2（定員1）：C B A D
病院3（定員2）：D A B C

「病院最適」

安定割当に関する性質

“Rural Hospital” Theorem と呼ばれる

定理

(i) 各病院に割り当てられる研修医の人数は，どの安定割当でも等しい

(ii) ある安定割当で病院 h に割り当てられた研修医の人数が定員未満

➔ 病院 h に割り当てられる研修医は，どの安定割当でも等しい

(i)の意味：２つの安定割当 A, A’ および病院 h について

割当 A において病院 h に割り当てられた研修医の人数

＝割当 A’ において病院 h に割り当てられた研修医の人数

(ii)の意味：

割当 A において病院 h に割り当てられた研修医の人数＜定員

かつ，h に割り当てられた研修医が A,B,C

➔割当 A’ においても，病院 h にA,B,Cが割り当てられる

アルゴリズムの実行例：研修医プロポーズ

研修医A：2 1 3
研修医B：3 1 2
研修医C：2 3 1
研修医D：1 3 2

病院1（定員2）：B A D C
病院2（定員1）：D C A B
病院3（定員2）：A D C B

定員1なので，
Aは拒否される

研修医A：~~2~~ 1 3
研修医B：3 1 2
研修医C：2 3 1
研修医D：1 3 2

病院1（定員2）：B A D C
病院2（定員1）：D C ~~A~~ B
病院3（定員2）：A D C B

Aは病院1に
プロポーズ
➔定員以下な
のでOK

アルゴリズムの実行例：病院プロポーズ

研修医A：213
研修医B：312
研修医C：231
研修医D：132

病院1（定員2）：BADC
病院2（定員1）：DCAB
病院3（定員2）：ADCB

各病院は
定員分だけ
プロポーズ

研修医A：21~~3~~
研修医B：312
研修医C：231
研修医D：13~~2~~

病院1（定員2）：BADC
病院2（定員1）：~~A~~CAB
病院3（定員2）：~~A~~DCB

研修医A：21~~3~~
研修医B：312
研修医C：2~~3~~1
研修医D：13~~2~~

病院1（定員2）：BADC
病院2（定員1）：~~A~~CAB
病院3（定員2）：~~A~~D~~C~~B

アルゴリズムの実行例：病院プロポーズ

研修医A：2 1 ~~3~~
研修医B：3 ~~1~~ 2
研修医C：2 ~~3~~ 1
研修医D：1 3 ~~2~~

病院1（定員2）：~~3~~ A D C
病院2（定員1）：~~D~~ C A B
病院3（定員2）：~~A~~ D ~~C~~ B

各病院は
定員分だけ
プロポーズ

研修医A：2 1 ~~3~~
研修医B：3 ~~1~~ 2
研修医C：2 ~~3~~ 1
研修医D：1 ~~3~~ ~~2~~

病院1（定員2）：~~3~~ A D C
病院2（定員1）：~~D~~ C A B
病院3（定員2）：~~A~~ D ~~C~~ B

“Rural Hospital” Theorem より，
安定割当での各病院への割当人数は
常に　2，1，1　となる

研修医マッチング問題の拡張

- 都会の病院は人気が高いことが多い
- 地方の病院は人気が低いことが多い（切実）

➔地方病院の研修医の人数を確保するための案

追加条件１：地方病院の研修医を十分確保したい

→各病院に割り当てる研修医の人数に下限を設ける

追加条件２：都会に来る研修医の総数を抑えたい

→各地域ごとに，その地域内の病院に割り当てられる研修医の総数の上限を設ける

このような追加条件のもとで，安定な割当を見つけたい

---そもそも，存在するか？

追加条件下での安定割当の存在性

- 追加条件の下では，安定割当が存在しないことがある

（証明）“Rural Hospital” Theorem より，
（追加条件のない）任意の安定割当において，
各病院に割り当てられる研修医の人数は一意に定まる
∴ある安定割当において，
ある病院への割当人数＜下限
ならば，追加条件1の下では安定割当は存在しない
同様に，　ある地域への割当総数＞上限
ならば，追加条件2の下では安定割当は存在しない

なので，前述の問題を解決するためには，
モデル（問題設定）を変更する必要あり．

アルゴリズムの実行例：病院プロポーズ

研修医A：2 1 ~~3~~
研修医B：3 ~~1~~ 2
研修医C：2 ~~3~~ 1
研修医D：1 3 ~~2~~

病院1（定員2）：~~3~~ A D C
病院2（定員1）：~~D~~ C A B
病院3（定員2）：~~A~~ D ~~C~~ B

各病院は
定員分だけ
プロポーズ

研修医A：2 1 ~~3~~
研修医B：3 ~~1~~ 2
研修医C：2 ~~3~~ 1
研修医D：1 ~~3~~ ~~2~~

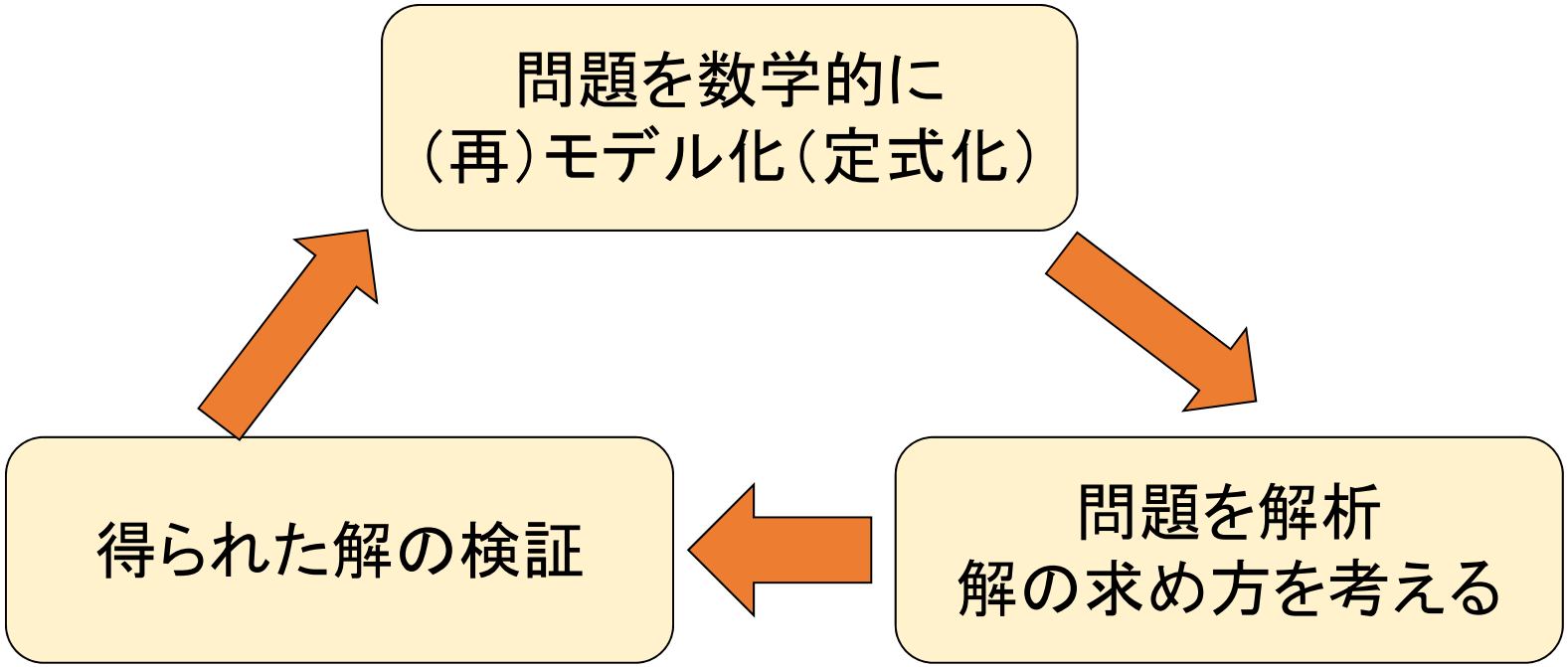
病院1（定員2）：~~3~~ A D C
病院2（定員1）：~~D~~ C A B
病院3（定員2）：~~A~~ D ~~C~~ B

病院3の下限を
2にする
→安定割当が
存在しない

“Rural Hospital” Theorem より，
安定割当での各病院への割当人数は
常に　2，1，1　となる

現実社会の問題の解き方

- 解決したい問題があるとき. . .



- モデル化された問題を解くことが目的ではない
- 元々の問題の解決策を求めることが目的

安定結婚問題の拡張

- その１：男女数が異なる場合
- その２：独身を許す（パートナーにしたくない異性を考慮）
- その３：同順位を許す
- その４：１対多マッチング（１つの病院に複数の研修医を割り当て）

同順位を許した安定マッチング

- 今までの設定：異性に対して異なる順位をつけた
- ここでの設定：同じ順位の異性を許す
  - 同順位の異性はカッコで表記

男A：2(41)3	女1：(BADC)
男B：3(142)	女2：DC(AB)
男C：2314	女3：A(DC)B
男D：(41)32	女4：BADC

A-1, B-3, C-2, D-4 は「安定マッチング」か？

(A,4) に注目：男性Aにとって 4 は 1 と同順位

女性4にとって A は D より良い

➔「駆け落ち」する？

安定マッチングをどう定義？ ←→ ブロッキングペアをどう定義？

- ３種類の安定性を導入（超安定，強安定，弱安定）

超安定マッチング

超安定---男女ペアは，互いが現在の相手以上ならば「駆け落ち」
つまり，現状維持でも「駆け落ち」する

定義：Mは超安定(super-stable)マッチング
←→Mに以下の意味でのブロッキングペアが存在しない
定義： 男女のペア(m, w) は（マッチング Mに関する）
ブロッキングペア（駆け落ちペア）(m,w)
←→ (i) マッチング M でペアになっていない
(ii) マッチング M での m の相手 ≦ w
(iii) マッチング M での w の相手 ≦ m

超安定マッチングの例

男A：2(41)3
男B：3(142)
男C：2314
男D：(41)32

女1：(BADC)
女2：DC(AB)
女3：A(DC)B
女4：BADC

A-1, B-3, C-2, D-4 は
超安定マッチングではない
(A,4) はブロッキングペア

男A：2(41)3
男B：3(142)
男C：2314
男D：(41)32

女1：(BADC)
女2：DC(AB)
女3：A(DC)B
女4：BADC

A-4, B-3, C-2, D-1 は
超安定マッチングではない
(A,1) はブロッキングペア
Aの相手4と1は同順位
1の相手DとAは同順位

- この例では，実は超安定マッチングは存在しない
- 全員が同順位の場合の問題例では，超安定マッチングは存在しない

男A：(123)　女1：(BAC)
男B：(312)　女2：(BAC)
男C：(132)　女3：(CAB)

強安定マッチング

強安定---男女ペアは，互いが現在の相手以上
かつどちらかにとってより良い相手ならば「駆け落ち」
つまり，どちらかが改善できれば「駆け落ち」する

定義：Mは強安定(strongly stable)マッチング
←→Mに以下の意味でのブロッキングペアが存在しない
定義： 男女のペア(m, w) は（マッチング Mに関する）
ブロッキングペア（駆け落ちペア）(m,w)
←→ (i) マッチング M でペアになっていない
(ii) マッチング M での m の相手w’ ≦ w
(iii) マッチング M での w の相手m’ ≦ m
(iv) w’ < w または m’ < m が成立

強安定マッチングの例

男A：2(41)3
男B：3(142)
男C：2314
男D：(41)32

女1：(BADC)
女2：DC(AB)
女3：A(DC)B
女4：BADC

A-1, B-3, C-2, D-4 は
強安定マッチングではない
(A,4) はブロッキングペア

男A：2(41)3
男B：3(142)
男C：2314
男D：(41)32

女1：(BADC)
女2：DC(AB)
女3：A(DC)B
女4：BADC

A-4, B-3, C-2, D-1 は
強安定マッチング

- 強安定マッチングは存在しないこともある

男A：12
男B：(12)

女1：BA
女2：BA

A-1, B-2 は強安定ではない
(B,1) はブロッキングペア
A-2, B-1 も強安定ではない
(B,2) はブロッキングペア

超安定・強安定マッチングの計算

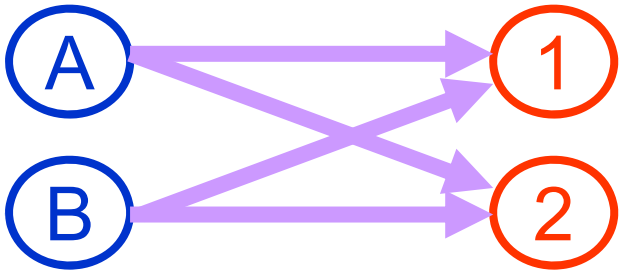
- 受入保留アルゴリズムを修正することで，
  - 超安定・強安定マッチングの有無
  - （存在する場合は）超安定・強安定マッチング

が可能

修正のポイント

- 男性は，同順位の女性全員にプロポーズ
- 女性は，同順位の男性をすべて仮パートナーにする

なので，以下のような状況がでてくる→この後の対応は



超安定・強安定で異なる
（詳細は省略）

弱安定マッチング

強安定---男女ペアは，互いが現在の相手より良いならば「駆け落ち」
つまり，互いに改善できれば「駆け落ち」する

定義：Mは弱安定(weakly stable)マッチング
←→Mに以下の意味でのブロッキングペアが存在しない
定義： 男女のペア(m, w) は（マッチング Mに関する）
ブロッキングペア（駆け落ちペア） (m,w)
←→ (i) マッチング M でペアになっていない
(ii) マッチング M での m の相手w’ < w
(iii) マッチング M での w の相手m’ < m

弱安定マッチングの計算

- 弱安定マッチングは常に存在する
- 計算も簡単: 受入保留アルゴリズムをそのまま利用
- 求め方:
  1. 選好リストに同順位があれば，適当な順番で順位をつける
  2. 受入保留アルゴリズムを適用，安定マッチングを求める
  3. 求めた安定マッチングは，
     元の選好リストに対する弱安定マッチングになる