数理経済学 第11回 財の交換 1対1マッチング

塩浦昭義 東京工業大学社会工学専攻准教授 shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

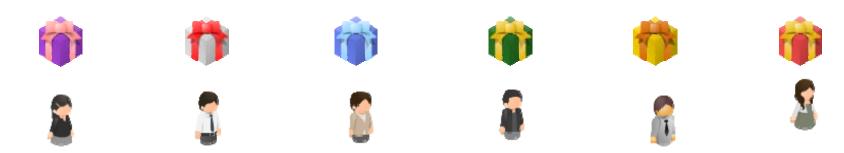
# 今後の授業の流れ

- •これまでの講義内容
  - ひとりの意思決定者がより良い選択肢を選ぼうとする
  - •よりよい選択肢の見つけ方を議論
- ・これからの講義内容:皆が満足する「良い」システム(制度)の設計
  - 複数の意思決定者が、それぞれより良い選択肢を選ぼうとする
  - それぞれ競合関係にある
  - システム(制度)設計者の立場から、皆が満足するシステムを設計 (公平、わかりやすい、「ずる」を許さない、...)

# 財の交換

### 財の交換の問題

- •n 人にプレゼントが配られた
- 多くの人は、自分のプレゼントより、他人のプレゼントが欲しい
- 交換して、よりよいプレゼントをもらうことにする
- どのように交換すれば、皆満足するか(不満をもたないか)?



別の例:学生寮の部屋の再配分(論文でよく出てくる)

- •n 人に寮の部屋が割り当てられた
- 多くの人は、自分の部屋より、他人の部屋に住みたい
- 交換して、よりよい部屋を得ることにする
- ・どのように交換すれば、皆満足するか(不満をもたないか)?

### 財の交換の問題:詳しい定義

- n 人 i=1,2,...,n に財が配られた(i さんの財= i とする)
- •各個人 i は, 財全体に対する選好(欲しい順番)をもつ
  - 記号:  $j_1 >_i j_2 >_i \cdots >_i j_n$
  - 「欲しさが同じ」は許さない
- 財を交換(再配分)して、よりよい状況に持って行きたい → どう配分するか?
- 配分の満たすべき条件(の一部)
  - 個人合理性:各個人に対し、新たな配分により得られる財は、 元の財より悪くならない
  - 効率性:「全体としてより良い,他の配分が存在しない」
    配分(x<sub>1</sub>,x<sub>2</sub>,...,x<sub>n</sub>)が効率的
    - **←→** $y_i \ge x_i(\forall i)$ かつ $y_k > x_k (\exists k)$  なる 配分 $(y_1, y_2, ..., y_n)$ が存在しない

### 財の交換の問題:具体例

①: 
$$4 > 3 > 2 > 1$$

$$(2)$$
: 3 > 2 > 4 > 1

$$(3)$$
: 1 > 2 > 3 > 4

$$(4)$$
:  $4 > 2 > 1 > 3$ 

$$1 \ 4 > 3 > 2 > 1$$

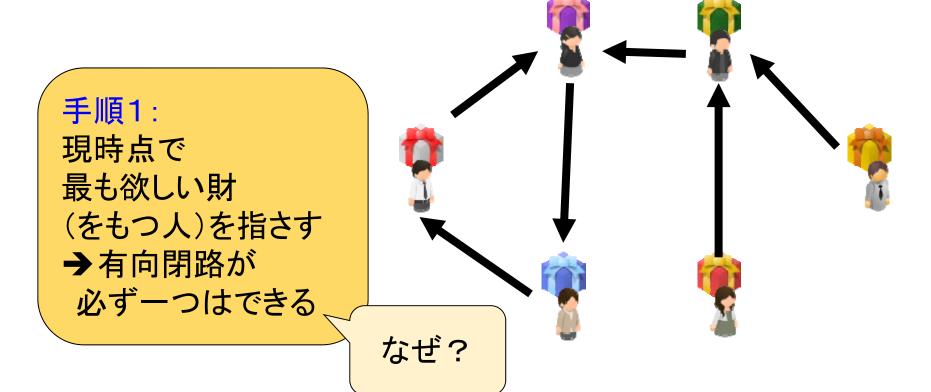
①: 
$$4 > 3 > 2 > 1$$

①: 
$$4 > 3 > 2 > 1$$

①: 
$$4 > 3 > 2 > 1$$

個人合理性 &効率性を満たす

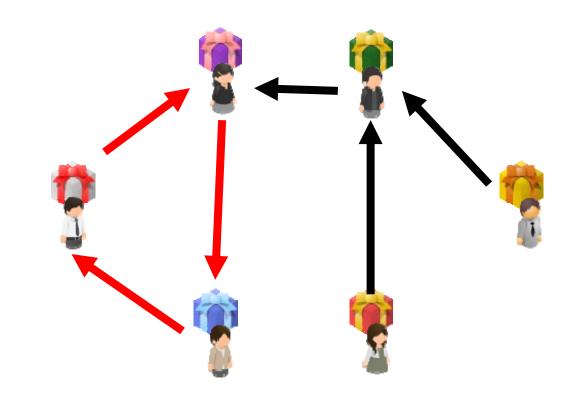
- top trading cycle (=最良取引閉路)を利用したアルゴリズム
- ・個人合理性, 効率性+αを満たす配分を求める
- ・とてもシンプル!



- top trading cycle (=最良取引閉路)を利用したアルゴリズム
- 個人合理性, 効率性+αを満たす配分を求める
- ・とてもシンプル!

#### 手順2:

閉路に沿って 財を交換, 閉路を削除. 手順1へ.



- top trading cycle (=最良取引閉路)を利用したアルゴリズム
- 個人合理性, 効率性+αを満たす配分を求める
- ・とてもシンプル!

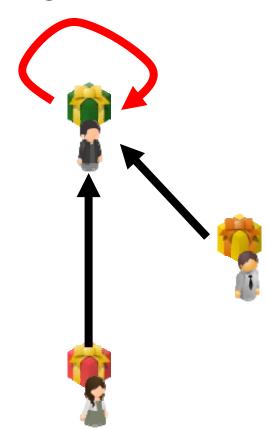
#### 手順1:

現時点で 最も欲しい財 (をもつ人)を指さす

#### 手順2:

閉路に沿って財を交換, 閉路を削除.

手順1へ.



- top trading cycle (=最良取引閉路)を利用したアルゴリズム
- ・個人合理性, 効率性+αを満たす配分を求める
- ・とてもシンプル!

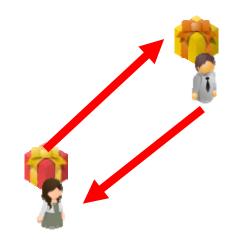
#### 手順1:

現時点で 最も欲しい財 (をもつ人)を指さす

#### 手順2:

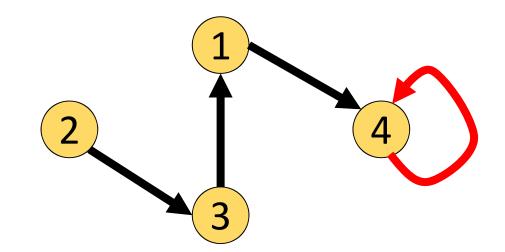
閉路に沿って財を交換, 閉路を削除.

手順1へ.

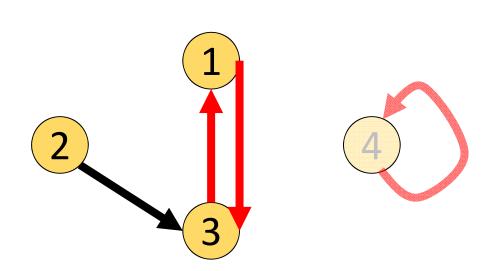


## TTCアルゴリズム:実行例1

$$\bigcirc 1 \ 4 > 3 > 2 > 1$$



$$\boxed{4} > 2 > 1 > 3$$

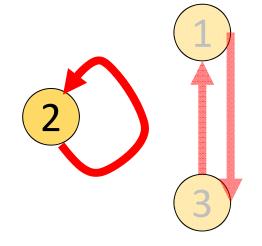


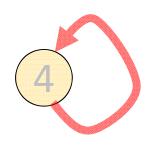
# TTCアルゴリズム: 実行例1

(1): 
$$X > 3 > 2 > 1$$

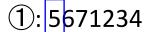
②: 
$$X > 2 > X > 1$$

$$\boxed{4} > 2 > 1 > 3$$

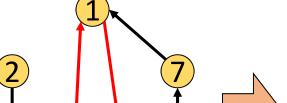


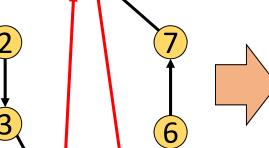


# TTCアルゴリズム: 実行例2



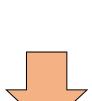
- 2: 3456712
- 3: 4527136
- 4: 1234567
- 5: 4523671
- **6**: 7123456
- **7**: 1745632





- 1): 5671234
- 2: 3456712
- 3: 4527136
- 4: 1234567
- **(5)**: 4523671
- **6**: 7123456
- 7: 1745632





- 1:5671234
- **2**: 3456712
- 3: 4527136
- **4**: 1234567
- **5**: 4523671
- **6**: 7123456
- **7**: **1**7**4**5632



### TTC配分の個人合理性

定義:TTC配分=TTCアルゴリズムが与える配分

#### 命題 TTC配分は個人合理性を満たす

(証明)各個人の行動は以下の通り: 第1希望を指さす 各個人に対し, 新たな配分により 得られる財は, 元の財より悪くならない

- →第1希望が他人に取られたら、第2希望を指さす
- →第2希望が他人に取られたら、第3希望を指さす
- →...
- →希望の財が得られない場合、いつかは自分のもつ財を指さす
- →閉路ができるので、自分自身がその財を得る

よって、各個人は、自分のもつ財より悪い財を得ることはあり得ない

### TTC配分の効率性

#### 定理 TTC配分は効率性を満たす

(証明)TTC配分=配分 $(x_1,x_2,...,x_n)$ とおく 配分 $(x_1,x_2,...,x_n)$ が効率的

**←**  $\rightarrow y_i \ge x_i(\forall i)$ かつ $y_k > x_k(\exists k)$  なる 配分 $(y_1, y_2, ..., y_n)$ が存在しない

これを示す

 $\leftarrow \rightarrow y_i \geqslant x_i(\forall i)$ を満たす配分 $(y_1, y_2, ..., y_n)$ は $(x_1, x_2, ..., x_n)$ のみ

S₁=第1回目の反復で財が割り当てられた人々

- $\rightarrow$ ∀ $j \in S_1: x_i$  は j さんにとって最良の財
- $\rightarrow y_i \geqslant x_i$  を満たす財は  $y_i = x_i$  のみ
- $\therefore y_i \geqslant x_i(\forall i) \text{ that } y_i = x_i (\forall i \in S_1)$ よって,  $\forall j \notin S_1: y_i \in N - \{x_i | i \in S_1\}$

### TTC配分の効率性

S<sub>2</sub>=第2回目の反復で財が割り当てられた人々

- → $\forall j \in S_2: x_j$  は j さんにとって、残りの財 $N \{x_i | i \in S_1\}$ の中で最良
- →残りの財の中で $y_i \ge x_i$  を満たす財は  $y_i = x_i$  のみ
- $\therefore y_i \geq x_i(\forall i)$  ならば  $y_i = x_i (\forall i \in S_1 \cup S_2)$ よって,  $\forall j \notin S_1 \cup S_2 : y_j \in N - \{x_i | i \in S_1 \cup S_2\}$

これを繰り返すと,  $y_i \ge x_i(\forall i)$  ならば  $y_i = x_i(\forall i)$  が得られる.

## TTCアルゴリズムの耐戦略性

アルゴリズム(ルール)の耐戦略性: ある人が嘘(本来と異なる)選好を申告しても, より良い財を得ることはできない

←→自分の選好を正直に申告するが最良

#### 定理 TTCアルゴリズムは対戦略性を満たす

(証明の概略)ある人(i さん)が k 回目の反復で財の割当を得たとする. そのとき, k-1 回目までの各反復において

ある閉路ができ、一部の人々に財が割り当てられている その閉路には、i さんは無関係:

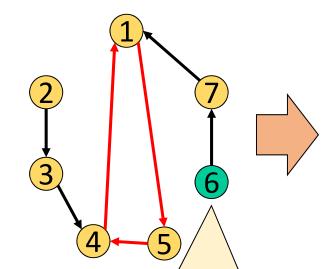
i さんがどこを指さしても、生成された閉路には影響なしよって、嘘をついたとしても、

正直な申告で得ることのできる財より良い財は得られない

## TTCアルゴリズム:嘘をついた例



- 2: 3456712
- 3: 4527136
- 4: 1234567
- 5: 4523671
- 6: 7123456
- 7: 1745632

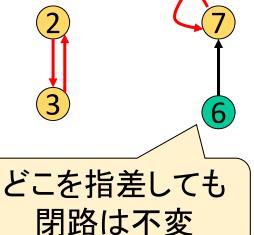


どこを指差しても 閉路は不変

- 1: 5671234
- 2: 3456712
- 3: 4527136
- 4: 1234567
- **(5)**: 4523671
- **6**: 7123456
- 7: 1745632



- ①: <mark>5</mark>671234
- **2**: 3456712
- **3**: 45<mark>27136</mark>
- **4**: 1234567
- **5**: 4523671
- **6**: 7123456
- 7: 1745632







- ⑥さんは最悪の財を得る予定しかし,
- 各反復で嘘をついても 閉路には影響なし

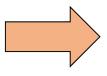
### TTC配分の強コア性

個人合理性&効率性を満たす場合でも、問題が生じることあり

①: 
$$4 > 3 > 2 > 1$$

①と③が結託して, このグループで 財の再配分をする

$$\bigcirc 3 > 1$$



31 > 3

- ①はより良い財,
  - ③は同じ財
- →独立に交換した 方が良い

望ましい配分(強コア配分):「一部のグループが逸脱して, グループの皆が損をせず,誰か一人以上が得をする」 ことが起こらない

定理 TTC配分は強コア性を満たす. さらに、強コア性を満たす配分はTTC配分のみ.

## 演習問題

問1:右の財の交換の問題例に

TTCアルゴリズムを適用して

配分を計算せよ.

各反復のグラフおよび閉路を書くこと.

問2:右の財の交換の問題例の

TTC配分を計算せよ.

また、それ以外の配分で、

個人合理性および効率性を

満たすものを求めるとともに.

それが強コアでない理由を述べよ.

1: 3765421

**2**: 1234567

3: 2467531

**4**: 1247653

**(5)**: 3214765

6: 2476135

7: 2345671

(1): 231

**2**: 132

**3**: 123

問3:有向グラフにおいて、各頂点からでる枝がちょうど1本存在するとき、有向閉路が必ず存在することを証明せよ. (ヒント)有向閉路を求めるアルゴリズムを考えてみる.