2016 年度 数理経済学 中間試験問題［50 点満点］

2016 年 7 月 12 日(火)15 時 05 分～16 時 30 分（85 分）

学科

学籍番号

名前

※問題は問１から問４まである.
※A4 用紙を持ち込んでいる場合には，名前と学籍番号を書いて必ず提出すること.

問 1

（1）以下のグラフの最小全域木を，クラスカルのアルゴリズムおよびプリムのアルゴリズムを用いて計算せよ．**最小全域木の枝を太線で描く**と共に，最小全域木の各枝に対して**追加された順番**を書けば良い．プリムのアルゴリズムでは，**頂点 S を根とすること**．

（2）全域木の定義を書け．また，定義を用いて，全域木の任意の 2 頂点の間の路は唯一に定まることを証明せよ．

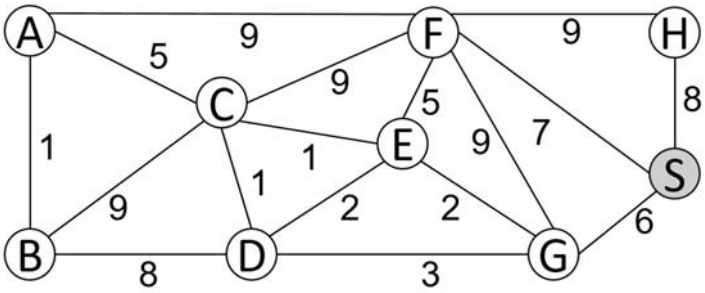
（3）枝に費用の与えられたグラフを考える．このグラフの任意の閉路 C に対し，閉路に含まれる枝の中で最も費用が大きい枝を(s,t)とする．このとき，グラフの最小全域木であって，枝(s,t)を含まないものが存在する．このことを証明せよ．

注意 1：（2）で示した命題を使ってもよい．

注意 2：証明中で「クラスカルのアルゴリズム」を利用する場合には，クラスカルのアルゴリズムが最小全域木を求めることを，きちんと証明する必要がある．

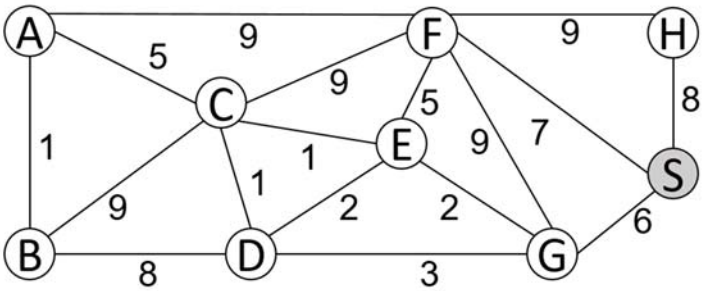
解答欄

（1）クラスカルのアルゴリズムの実行結果



プリムのアルゴリズムの実行結果

（**頂点Sを根とすること**）



解答欄

問 2

下記の差分不等式系の解の有無を判定するために，最短路問題に帰着して計算する．

$$x_b - x_a \leq 1,\ x_a - x_b \leq 3,\ x_c - x_a \leq 1,\ x_a - x_c \leq 2,$$
$$x_c - x_b \leq 3,\ x_d - x_c \leq 4,\ x_c - x_d \leq 6$$

（1）この不等式系に対応するグラフを書け．各枝にはその長さも書くこと．

（ヒント：変数に対応しない新たな頂点 s は不要）

（2）このグラフにおける，始点から各頂点への最短路長を，ベルマン・フォードのアルゴリズムを使って計算せよ．計算の過程として，各$k = 0,1,2,\ldots$に対し，k回目の反復における，各頂点への枝数k以下の最短路長を書くこと．

（3）上記の結果を基にして，解が存在するならばその解を書け．解が存在しないならばその証拠を書け．

解答欄

解答欄

問 3

以下の問では，各枝(u,v)に非負の長さ$\ell(u,v)$の与えられた有向グラフを考える．

（1）頂点 s から頂点 t への最短路 P が存在し，その最短路が頂点 x を通るとする．
このとき，頂点 x から頂点 t への，P の部分路 P'は，x から t への最短路である．
これを証明せよ．

（2）頂点 s から各頂点 v への最短路長を$d(v)$とおく．このとき，グラフの各枝(u,v)に対し，
$d(v) \leqq d(u) + \ell(u,v)$が成り立つことを証明せよ．

解答欄

解答欄

問４

（１）グラフのマッチングの定義，および頂点被覆の定義を書け．

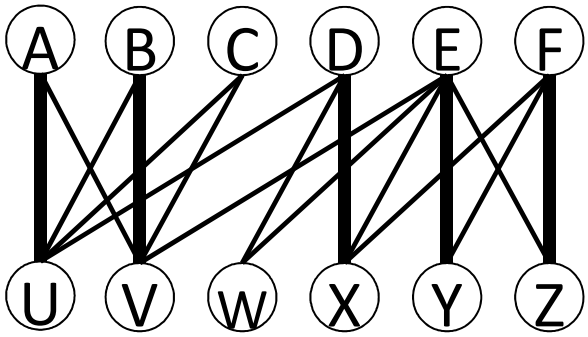
（２）あるグラフにおけるマッチングMおよび頂点被覆Sについて考える．S に含まれる各頂点 v に対し，v に接続する M の枝は高々１つであることを証明せよ．

（３）左下図の二部グラフとマッチング（マッチングの枝は太い線で表現）について考える．
このグラフの最小頂点被覆を求めよ（結果のみ書けば良い）．
また，（２）の結果を用いて，求めた頂点被覆が最小である理由を述べよ．
（単に，「最大マッチング最小被覆定理より」という理由ではダメ）

（４）二部グラフとそのマッチングが与えられたとき，増加路を求める問題は，ある有向グラフでの有向路を求める問題に帰着可能である．どのようにすれば帰着できるのか，説明せよ．
また，その帰着によりなぜ増加路が求められるのか，理由を説明せよ．

（５）次ページ下のグラフにおける最大重みkマッチングを，$k = 1,2,3$の場合について計算せよ．
結果のみ書けば良い．

（３）で使うグラフとマッチング



解答欄

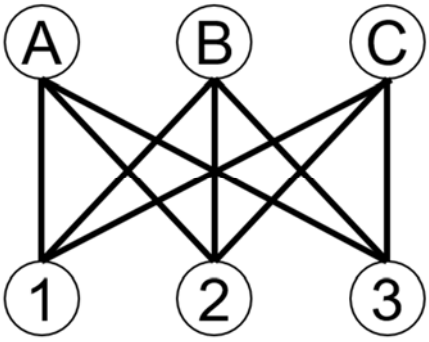
（５）の解答欄

グラフは以下のとおり.

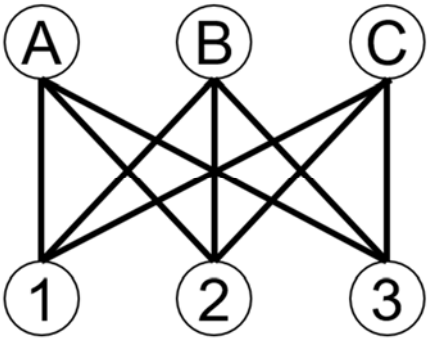
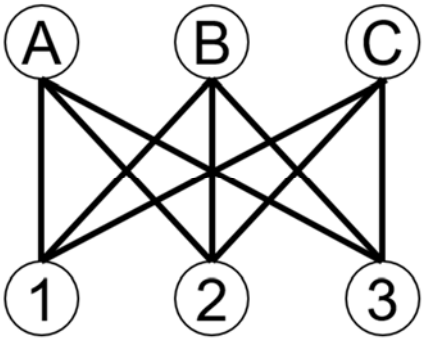
各枝の重みは右の表で与えられる.

$w(i,j)$	A	B	C
①	6	4	1
②	7	6	5
③	1	4	2

最大重み１マッチング



最大重み２マッチング



最大重み３マッチング