数理経済学
第6回
最大重みマッチング問題

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

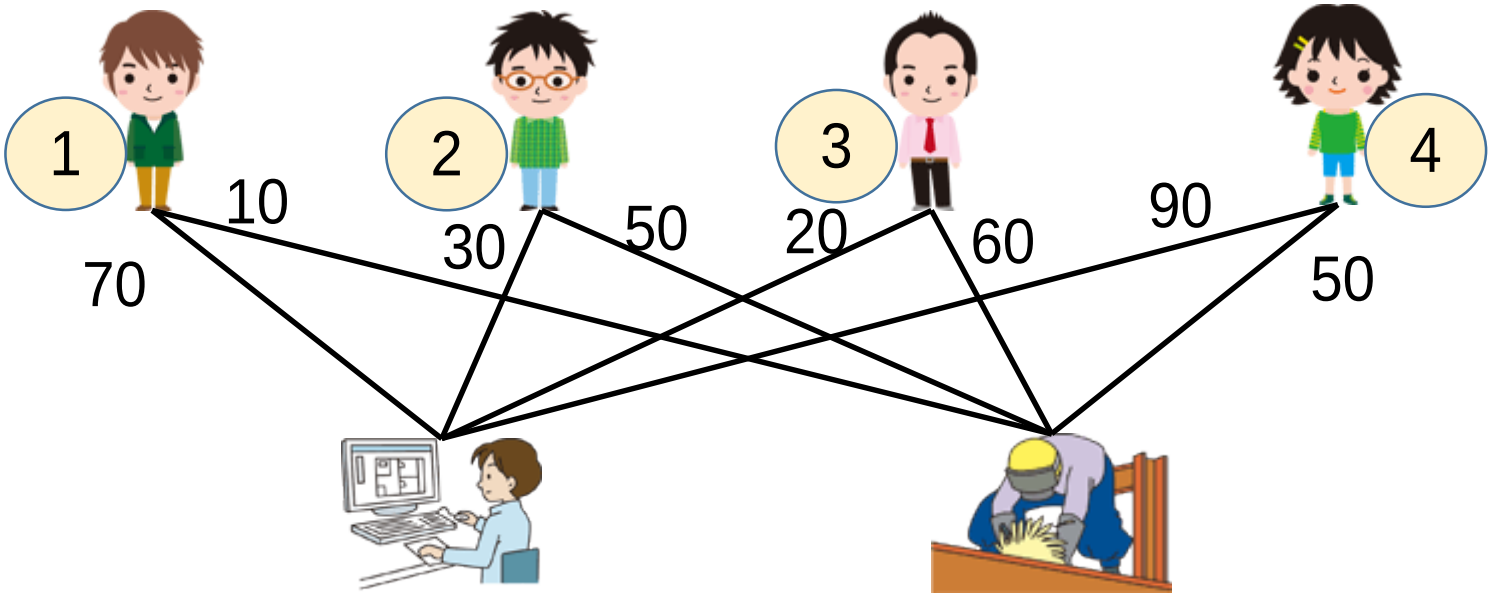
中間試験について

- 日時：7月12日（火）15:05〜16:30 (85分)
- 手書きのA4用紙一枚のみ持ち込み可（印刷やコピーは不可）
  - これも採点の対象，試験終了後に回収します
- 本，ノート等の持ち込みは不可
- 座席はこちらで指定
- 試験内容：
  - 最小全域木，最短路，最大（重み）マッチング
  - 証明，アルゴリズムの実行，用語の定義など
- ５０点満点，29点以下は不合格（救済の可能性あり）

最大重みマッチング問題の定義と例

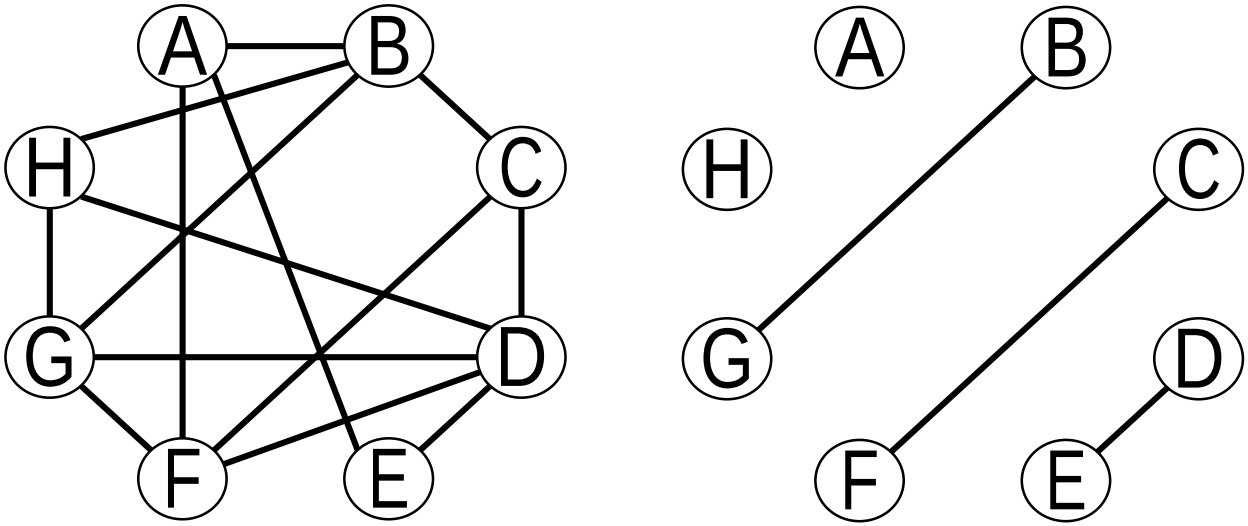
最大重みマッチング問題

- 労働者に仕事を割り当てたい
  - 各労働者には，高々1つの仕事が割り当て可能
  - 各仕事は，高々一人の労働者に割り当て可能
  - 労働者を仕事に割り当てると，利益が得られる
- 総利益を最大にする割当を見つけたい è 最大重みマッチング



一般グラフの最大重みマッチング問題

- 一般のグラフでも，最大重みマッチング問題を考えることができる
  - 例：2人チーム（ペア）で作業を行う
  - 相性の良いチームを多く作りたい
  - 相性を数値化，相性の合計値を最大にするチームを求めたい

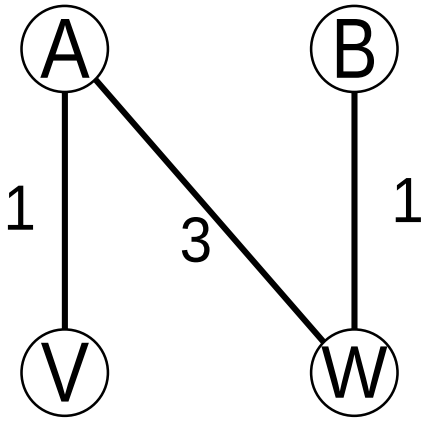


最大重みマッチング問題の定義

最大重みマッチング問題

- **入力**：グラフ G=(V,E)（頂点集合 V, 枝集合 E），
  各枝 (u,v) の重み w(u,v)
- **出力**：枝重みの和が最大のマッチング（最大重みマッチング）

※「最大重みマッチング è 最大サイズマッチング」は一般に成り立たない



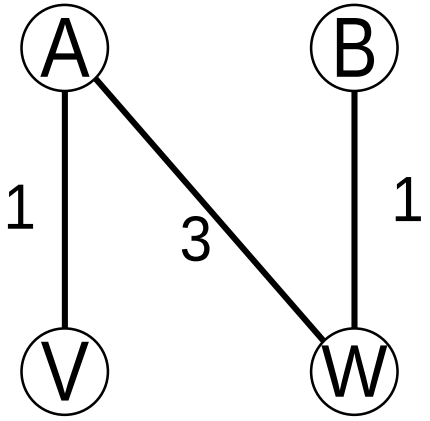
例：最大重みマッチングは
{(A,W)}, 重み3
最大サイズマッチングは
{(A,V), (B, W)}, 重み2

最大重みkマッチング問題の定義

最大重みkマッチング問題

- **入力**：グラフ G=(V,E)（頂点集合 V, 枝集合 E），
  各枝 (u,v) の重み w(u,v)
  正整数 k
- **出力**：枝数＝k のマッチングの中で枝重みの和が最大のもの
  (最大重みkマッチング)

例：最大重み1マッチングは
{(A,W)}, 重み3
最大重み2マッチングは
{(A,V), (B, W)}, 重み2



最大重みマッチング問題の例1：研究室配属問題

各研究室に学生数人を割り当てる

学生A,B,C,Dの４人を研究室X,Yへ

各研究室に配属できる人数には上限がある

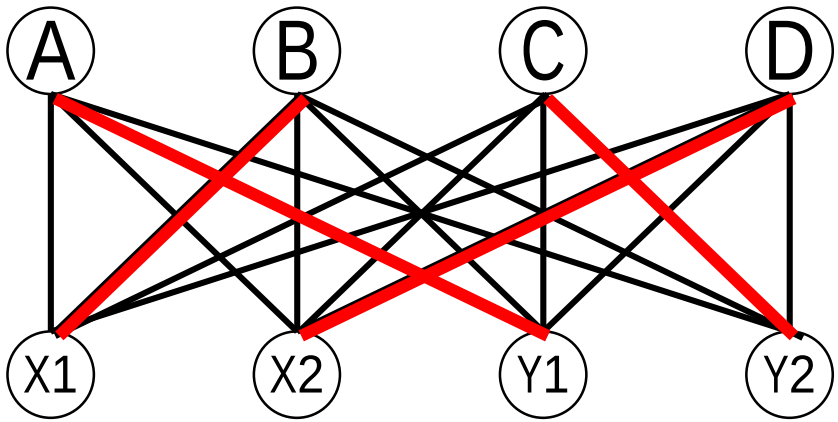
	X研究室	Y研究室
定員	2	2

学生の満足度の合計を最大にしたい

満足度	A	B	C	D
X	6	8	5	9
Y	9	1	5	3

研究室配属問題から
最大重みkマッチング問題へ

各学生に対応する頂点，各研究室の「枠」に対応する頂点
各学生と「研究室枠」の間に枝，重み＝満足度
k＝学生数



w(u,v)	A	B	C	D
X1	6	8	5	9
X2	6	8	5	9
Y1	9	1	5	3
Y2	9	1	5	3

最大kマッチング è 研究室配属案

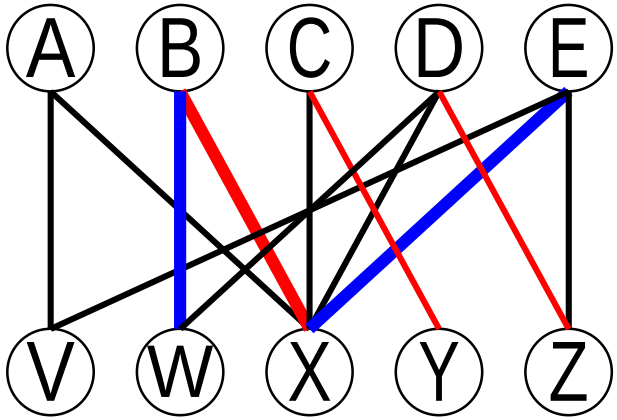
最大重みマッチングと交互路

(復習) 交互路・交互閉路

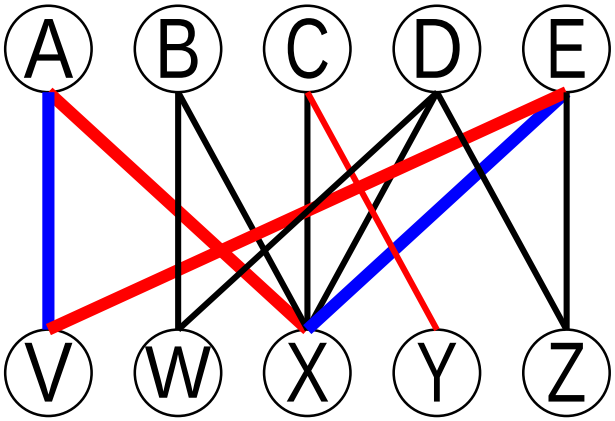
定義：マッチング Mに関する**交互路**
(i) **Mの枝とM以外の枝が交互に現れる路**
(ii) 路の最初の枝がM以外 è 路の始点は，Mの枝の端点ではない
(iii) 路の最後の枝がM以外 è 路の終点は，Mの枝の端点ではない

定義：マッチング Mに関する**交互閉路**
＝Mの枝とM以外の枝が交互に現れる閉路

交互路の例

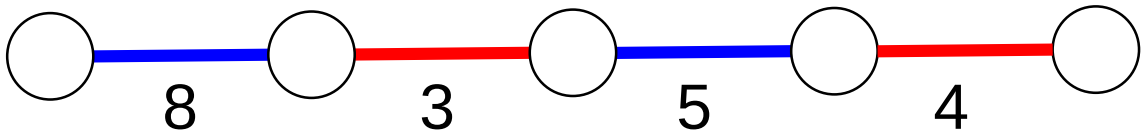


交互閉路の例



交互路・交互閉路による マッチングの更新

定義：マッチング Mに関する交互路（交互閉路）Pの**重み**
＝ $P \setminus M$**の枝重みの和** ー P∩M**の枝重みの和**



交互路の重み
＝8-3+5-4=6

命題 マッチングMに対し，Pは（Mに関する）交互路または交互閉路
è Pを使ってMの枝を入れ替えると，新しいマッチングM'ができる

$$M' = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$$

M'**の重み ー** M**の重み ＝** P **の重み**

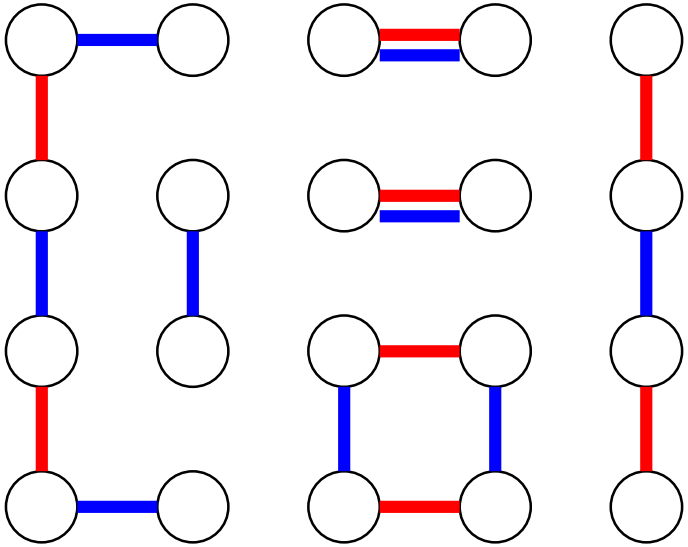
命題 正の重みの交互路（交互閉路）が存在
è 現在のマッチングMは最大重みではない
（対偶：マッチングMは最大重みマッチング
è 正の重みの交互路（交互閉路）は存在しない）

交互路によるマッチングの最適性条件

最大重みマッチングではない è 正の重みの交互路（閉路）が必ず存在

命題　正の重みの交互路（交互閉路）が存在
　　ç 現在のマッチングMは最大重みではない
（対偶：マッチングMは最大重みマッチング
　　ç 正の重みの交互路（交互閉路）は存在しない）

（証明）最大重みマッチングをM*とおく
枝集合$(M^* \setminus M) \cup (M \setminus M^*)$に注目
è 幾つかの（Mに関する）
　交互路・交互閉路からなる．
それらの重みの合計
　＝$M^* \setminus M$ の重み － $M \setminus M^*$ の重み
　＝M*の重み － M の重み＞0
∴ 正の重みの交互路または交互閉路が
　必ずひとつは存在



最大重みマッチングの計算

最大重みマッチング問題のアルゴリズム

「Mは最大重みマッチング ç è 正の重みの交互路 (閉路) がない」

これに基づき, 次のアルゴリズムが得られる

アルゴリズムA

ステップ0：初期マッチングMを任意に選ぶ (例えば $M := \emptyset$)

ステップ1： Mに関する正の重みの交互路 (閉路) の存在をチェック.

存在しない è 現在のMは最大重みマッチング (終了)

存在する è ステップ2へ.

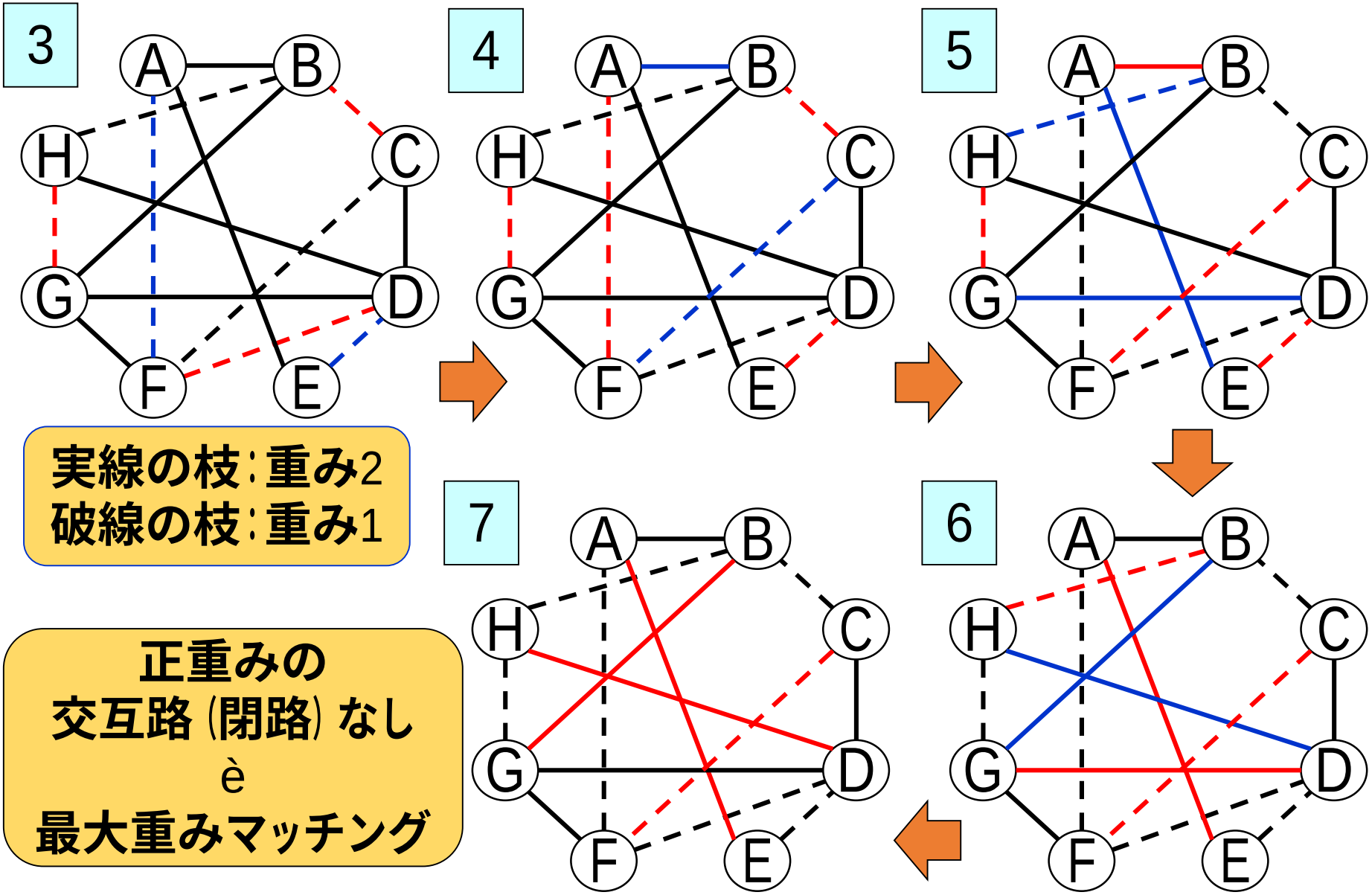
ステップ2：Mに関する正の重みの交互路 (閉路) P をひとつ見つけ,

P を用いて M を更新 ($M := (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$)

ステップ1へ.

反復回数が多くなる可能性あり

アルゴリズムの実行例



実線の枝：重み2
破線の枝：重み1

正重みの
交互路（閉路）なし
è
最大重みマッチング

最大重み増加路を用いたアルゴリズム

- 各k=0,1,2,… に対する最大重みkマッチングを求める
- 各反復で，重み最大の増加路を利用
- 高々 |V|/2回の反復で終了

アルゴリズムB

ステップ0：$M_0 := \emptyset$, k=0 とする．

ステップ1：M_kに関する増加路が存在しない è 終了

ステップ2：M_kに関する最大重みの増加路 P をひとつ見つけ，
P を用いて M_k を更新（$M_{k+1} := (M_k \setminus P) \cup (P \setminus M_k)$）
k:=k+1 とおいてステップ1へ．

命題　各k=0,1,… に対し，M_kは最大重みkマッチング

アルゴリズムの正当性

命題　各k=0,1,… に対し，M_kは最大重みkマッチング

（証明の概略）

ある k に対し，M_k は最大重み k マッチングとする．

このとき，ある最大重み k+1 マッチング M* で，

$(M^* \setminus M_k) \cup (M_k \setminus M^*)$ が（一つの）増加路となるようなものが存在することを示せば良い．

M* として，|M*∩ M_k |最大の最大重み k+1 マッチングを選ぶ

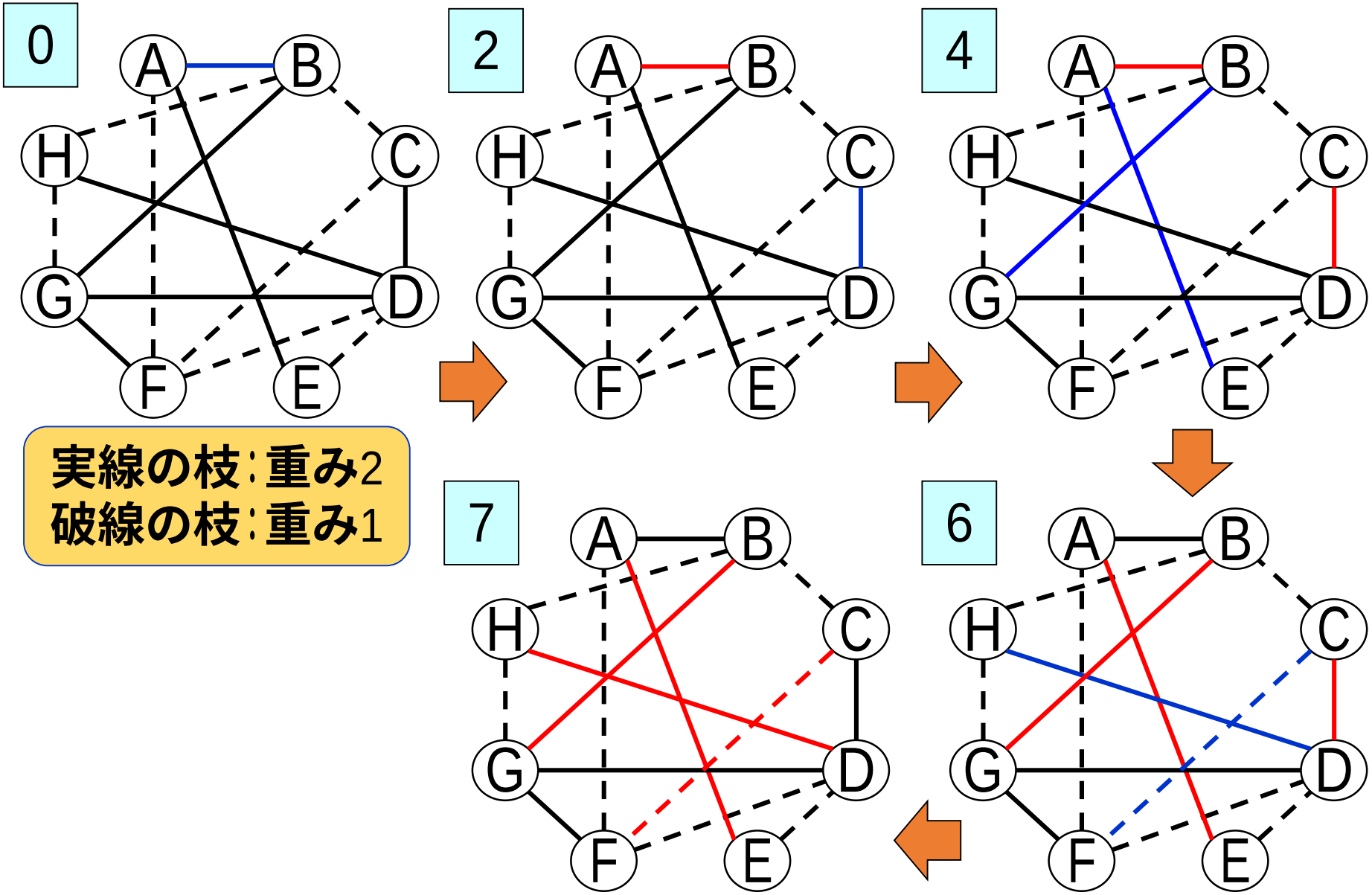
è $(M^* \setminus M_k) \cup (M_k \setminus M^*)$ は交互路･交互閉路の集まり

（注意：M* の方が枝数が多いので，増加路が必ず存在）

交互路･交互閉路が2つ以上存在する

è |M*∩ M_k |最大に矛盾することが示せる（なぜ？）

アルゴリズムの実行例

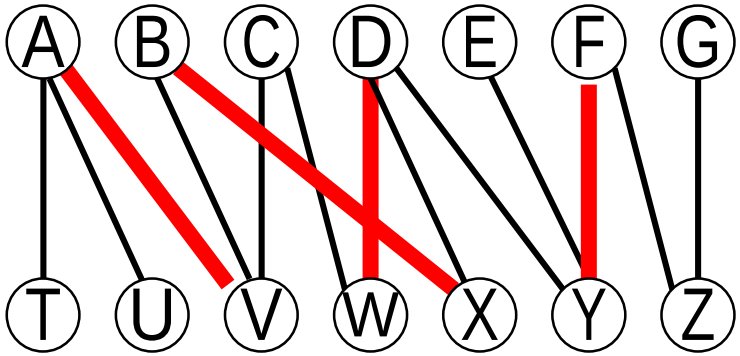


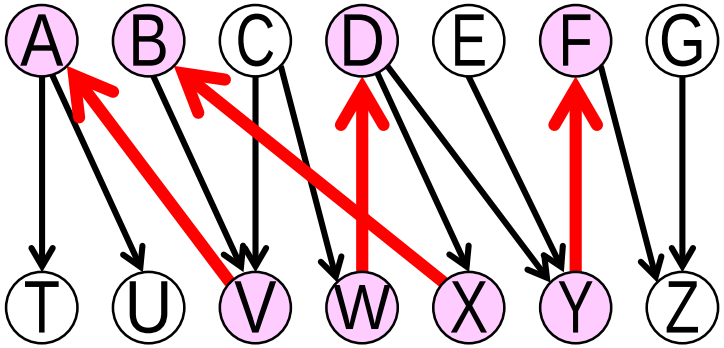
実線の枝：重み2
破線の枝：重み1

重み最大の増加路の見つけ方：二部グラフの場合

- 増加路を求める場合と同様に計算可能.
- 二部グラフの頂点集合が V_1, V_2 に分かれているとき，
  - マッチングMの枝は，V_2 の頂点から V_1 の頂点に向き付け
  - それ以外の枝は，V_1 の頂点から V_2 の頂点に向き付け
- V_1 の頂点のうち，
  - マッチングの枝が接続している頂点の集合 à U_1
  - 残りの頂点の集合 à T_1
- U_2, T_2 も同様に定義

ピンクの頂点：U_1とU_2
白い頂点：T_1とT_2



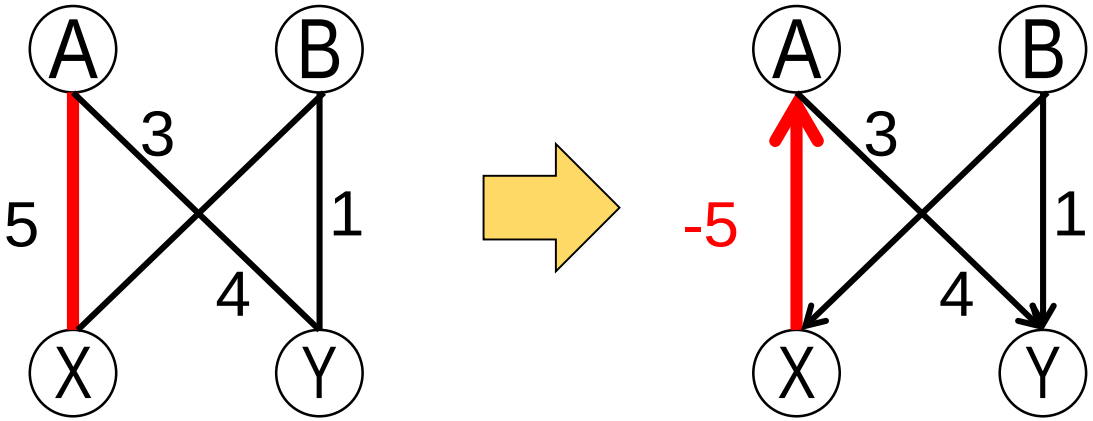


増加路の見つけ方：二部グラフの場合

- 各有向枝の長さ：
  - マッチングの枝の逆向き枝の長さ＝元の長さ×（－1）
  - それ以外の枝の長さ　　＝元の長さ
- 新しい有向グラフにおける T_1 の頂点から T_2 の頂点への有向路

  ß à 元の二部グラフの（Mに関する）増加路

∴有向グラフにおいて，T_1 の頂点から T_2 の頂点への有向路のうち，最も短いものを求めればよい



最大重みマッチング問題の例2：複数財オークション

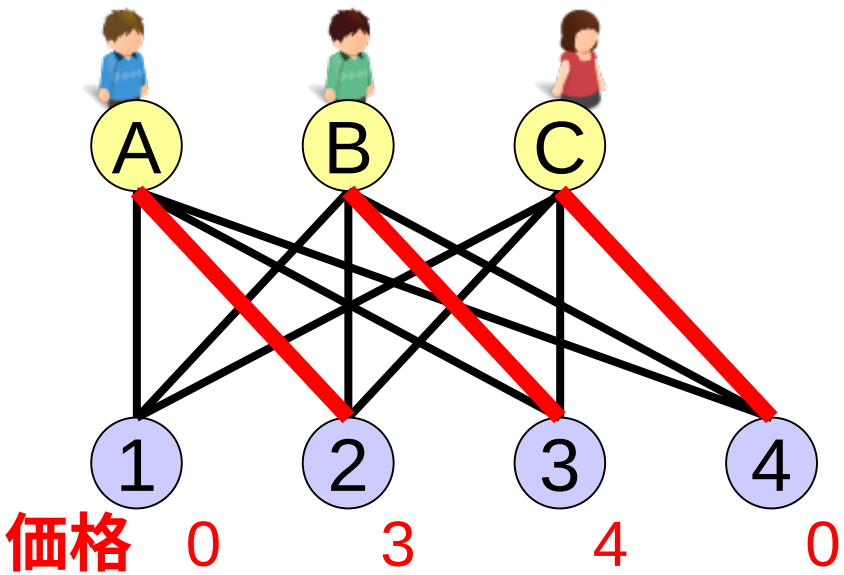
- m 個の財（品物）{1,2,…,m}を同時にオークションにかける
  - 各財は高々一人の参加者に割当て．財が売れ残っても可
  - 各参加者 i=1,2,…,n は高々1つの財を取得
- 各参加者 i は，欲しい財 j とその評価価格 w(i,j) のリストを提示
- オークション主催者は，各財の「適切な」価格p(j)を求める

オークションの目的：以下の条件を満たす価格と財の割当

- 参加者 i に財 j が割り当てられる è 利得 w(i,j)-p(j) 最大
  （$\max_{1\le j\le n}\{w(i,j)-p(j)\}\ge 0$ のとき）
- $\max_{1\le j\le n}\{w(i,j)-p(j)\}<0$ のとき，参加者 i に財を割り当てない
- 売れ残りの財の価格は 0

均衡価格，均衡割当

複数財オークションの例



w(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

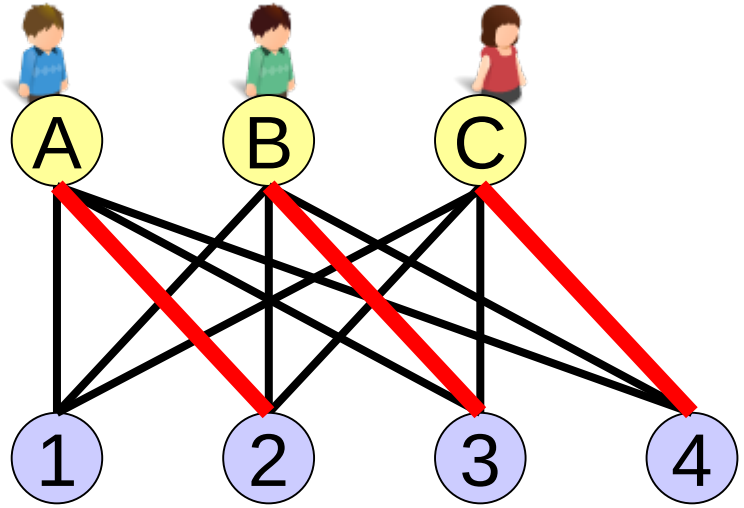
利得	A	B	C
①	3	1	0
②	4	3	4
③	-3	3	4
④	0	0	4

- 各参加者の利得は最大
- 財1は売れ残り è 価格0

複数財オークションと最大重みマッチングの関係

最大重みマッチング問題を解くと，均衡割当が得られる

定理
参加者と財の間のマッチングMは均衡割当
ç è Mは重み=w(i,j) としたときの最大重みマッチング

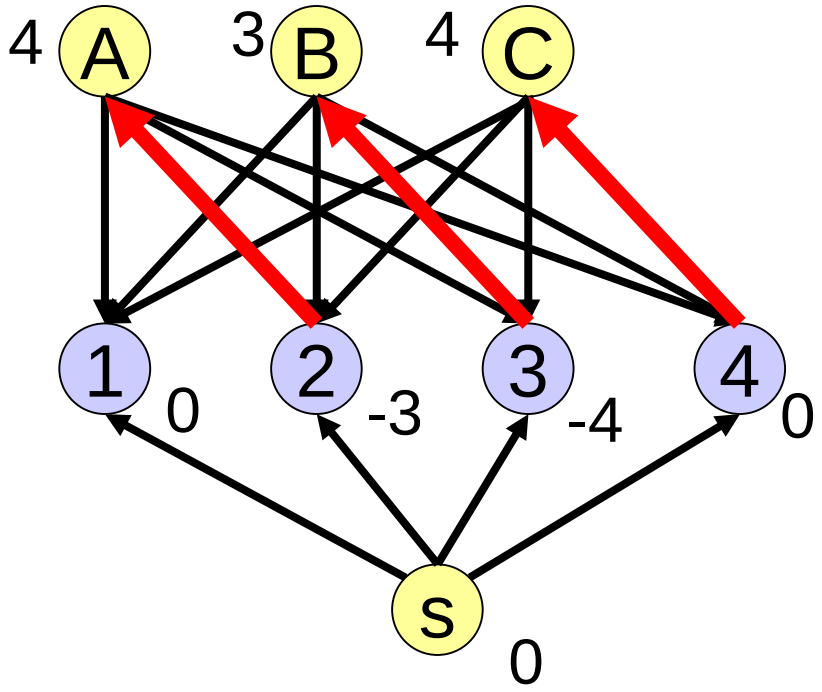


w(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

均衡価格の計算

均衡価格は最短路問題を解いて求めることができる

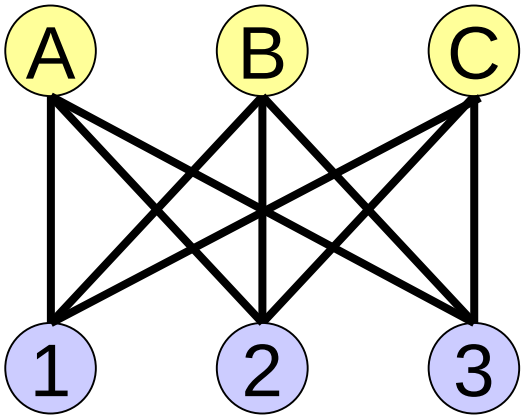
- **最大重みマッチングの枝：財 à 参加者に向き付け．長さ＝重み**
- **その他の枝：参加者 à 財に向き付け．長さ＝－重み**
- **新しい頂点 s，および sから各財への長さ0の枝をつける．**
- **財 j の価格＝ －（頂点 j への最短距離） è 均衡価格**



w(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

演習問題

問1：以下の二部グラフの最大重みマッチングを，アルゴリズムA
およびアルゴリズムBを用いて計算せよ．
ただし，アルゴリズムAの初期マッチングは{(A,3), (C,1)} とする．
各反復の動きが分かるように説明を書くこと．



w(i,j)	A	B	C
①	5	4	0
②	6	5	4
③	0	3	1

問2：問1の問題において，A，B，Cをオークション参加者，1，2，3を財と見なしたときの均衡価格を計算せよ．最短路の計算過程は書く必要なし．

問3：研究室配属問題の例について考える．
学生Cさんは X研究室に行きたいので，虚偽の満足度申告をすることにした．
各研究室の満足度をどのように申告するとよいか？理由も説明せよ．