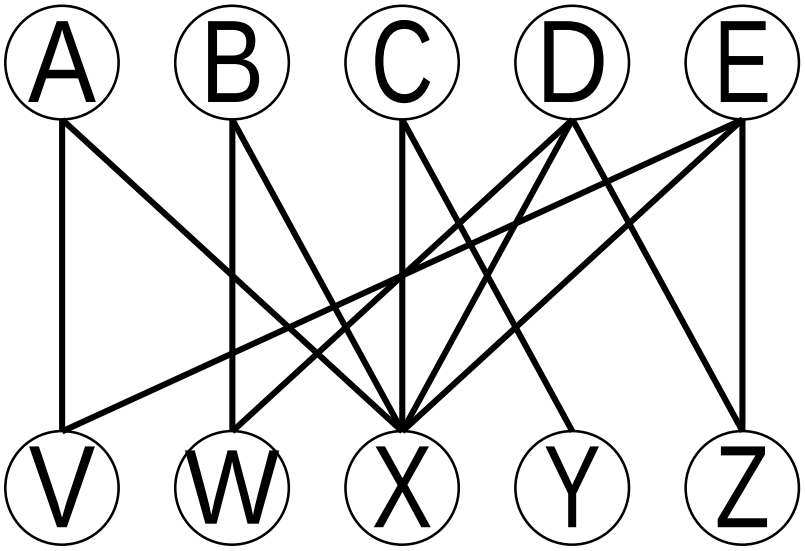
数理経済学
第5回
最大マッチング問題

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

マッチング問題

- マッチング問題：
  「ひと」や「もの」の間の最適なペアの集合を求める問題
- 例：労働者の仕事への割り当て
  - 5人の労働者 A, B, C, D, E,　5つの仕事 V, W, X, Y, Z
  - 各々の労働者は従事可能な仕事と不可能な仕事がある
    è グラフで表現可能



頂点の2つのグループ
V_1={A, B, …, E} と V_2={V, W, …, Z}
の間にのみ，枝が存在
ç **二部グラフ**と呼ばれる

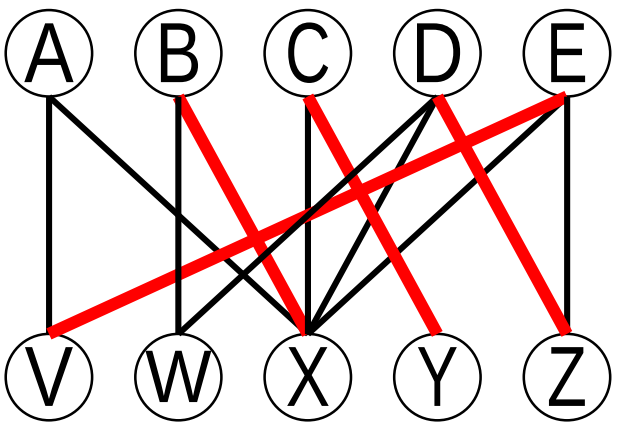
※2部グラフにおいて，V_1とV_2の頂点数は同じでなくても良い

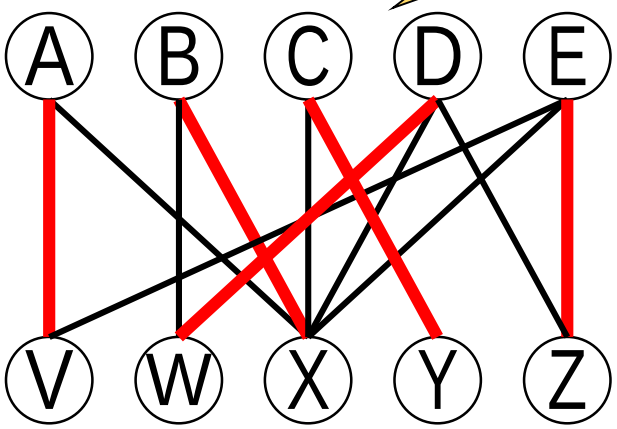
最大マッチング問題

- できるだけ多くの労働者に仕事を割り当てたい
  - 各労働者には，高々1つの仕事が割り当て可能
  - 各仕事は，高々一人の労働者に割り当て可能

  è 仕事の割当を枝集合で表現可能

最大
マッチング





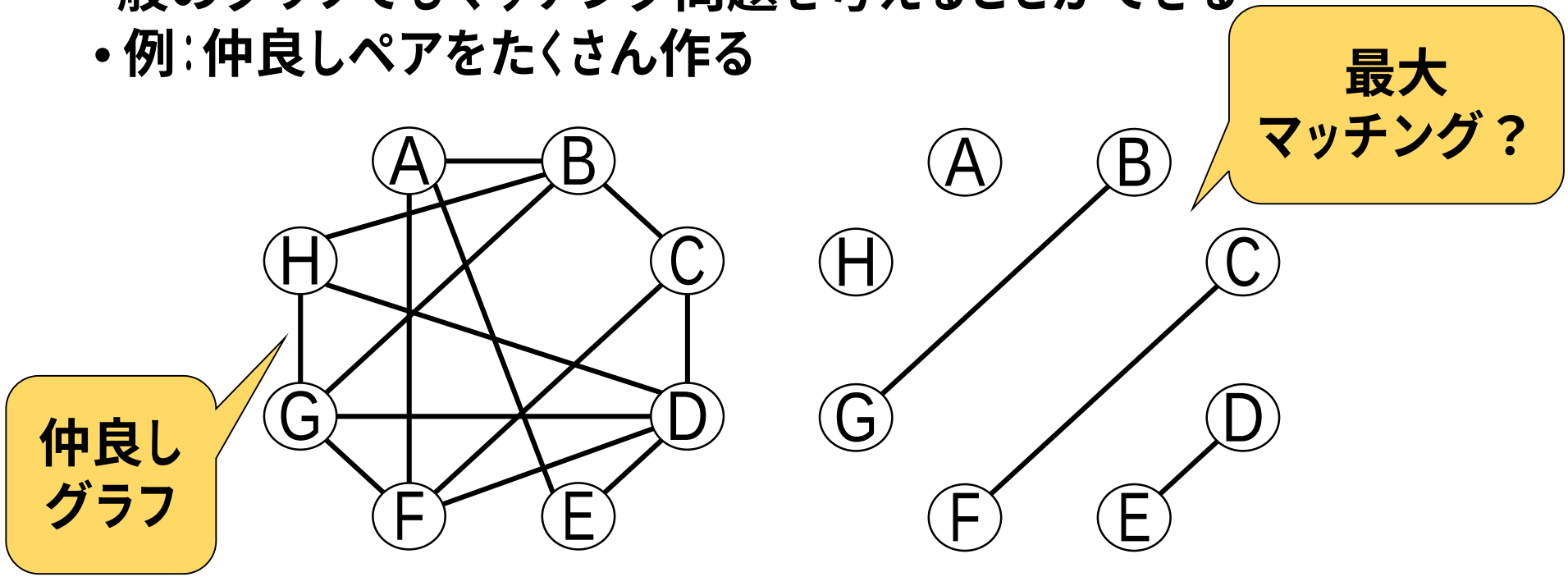
- グラフの**マッチング**：

  グラフの枝集合であって，各頂点に接続する枝の数（次数）が1以下
- **最大（サイズ）マッチング問題**：

  与えられたグラフのマッチングの中で，枝数最大のものを求める

一般グラフのマッチング問題

- 一般のグラフでもマッチング問題を考えることができる
  - 例：仲良しペアをたくさん作る



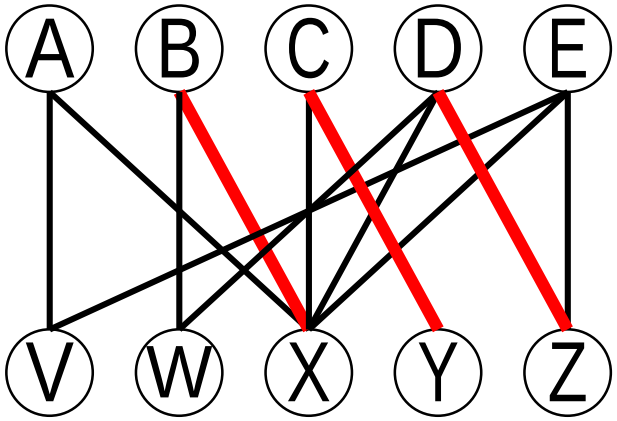
- グラフの**マッチング**：
  グラフの枝集合であって，各頂点に接続する枝の数（次数）が1以下
- **最大（サイズ）マッチング問題**：
  与えられたグラフのマッチングの中で，枝数最大のものを求める

マッチングと交互路

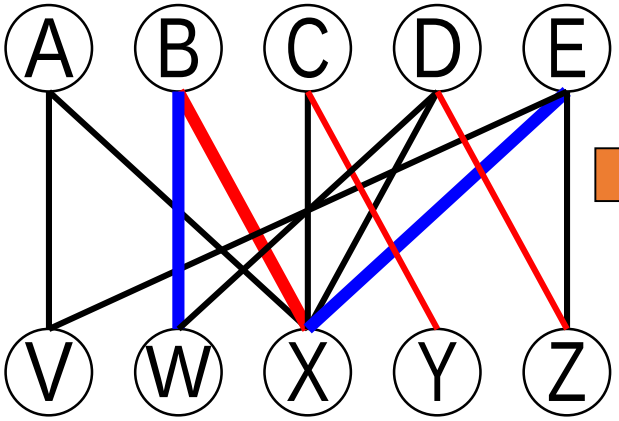
マッチングに関する交互路

交互路 – 新しいマッチングを作るための「道具」

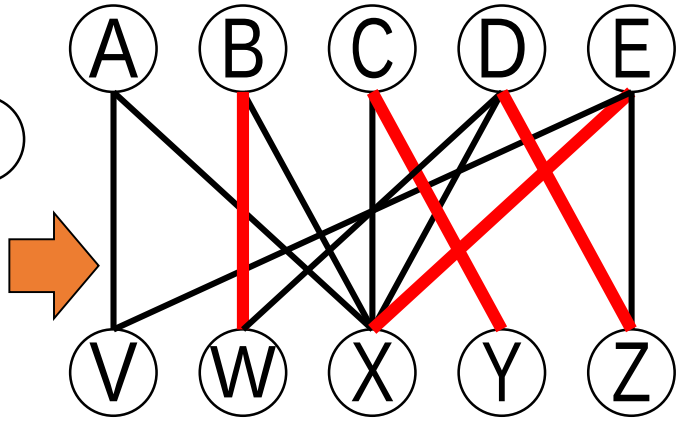
定義：マッチング Mに関する**交互路**
(i) **Mの枝とM以外の枝が交互に現れる路**
(ii) 路の最初の枝がM以外 è 路の始点は，Mの枝の端点ではない
(iii) 路の最後の枝がM以外 è 路の終点は，Mの枝の端点ではない



マッチング M



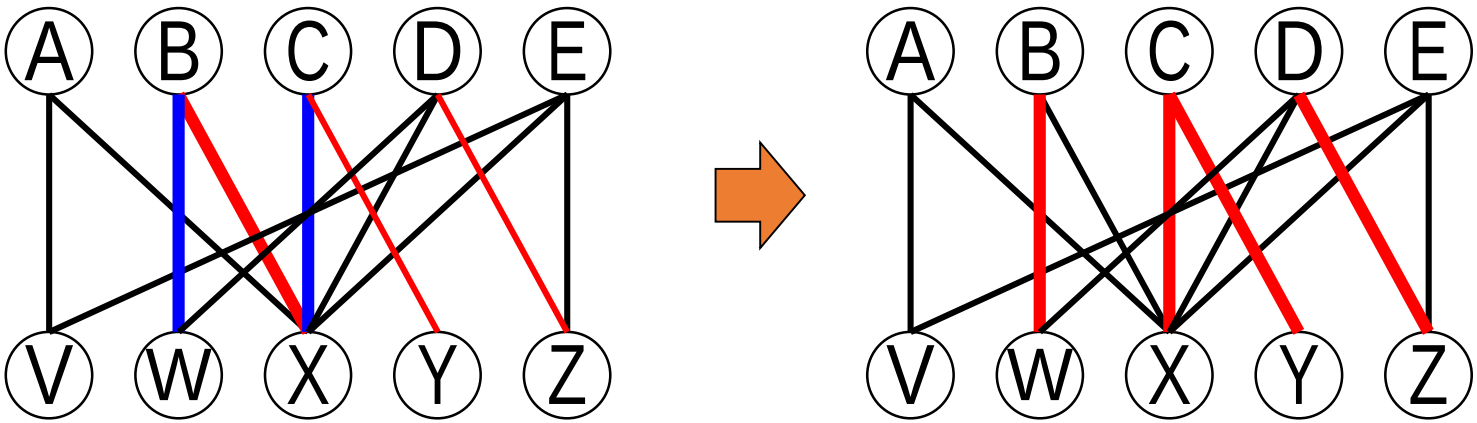
交互路



交互路を使って，
マッチングの枝を
入れ替えした結果

マッチングに関する交互路

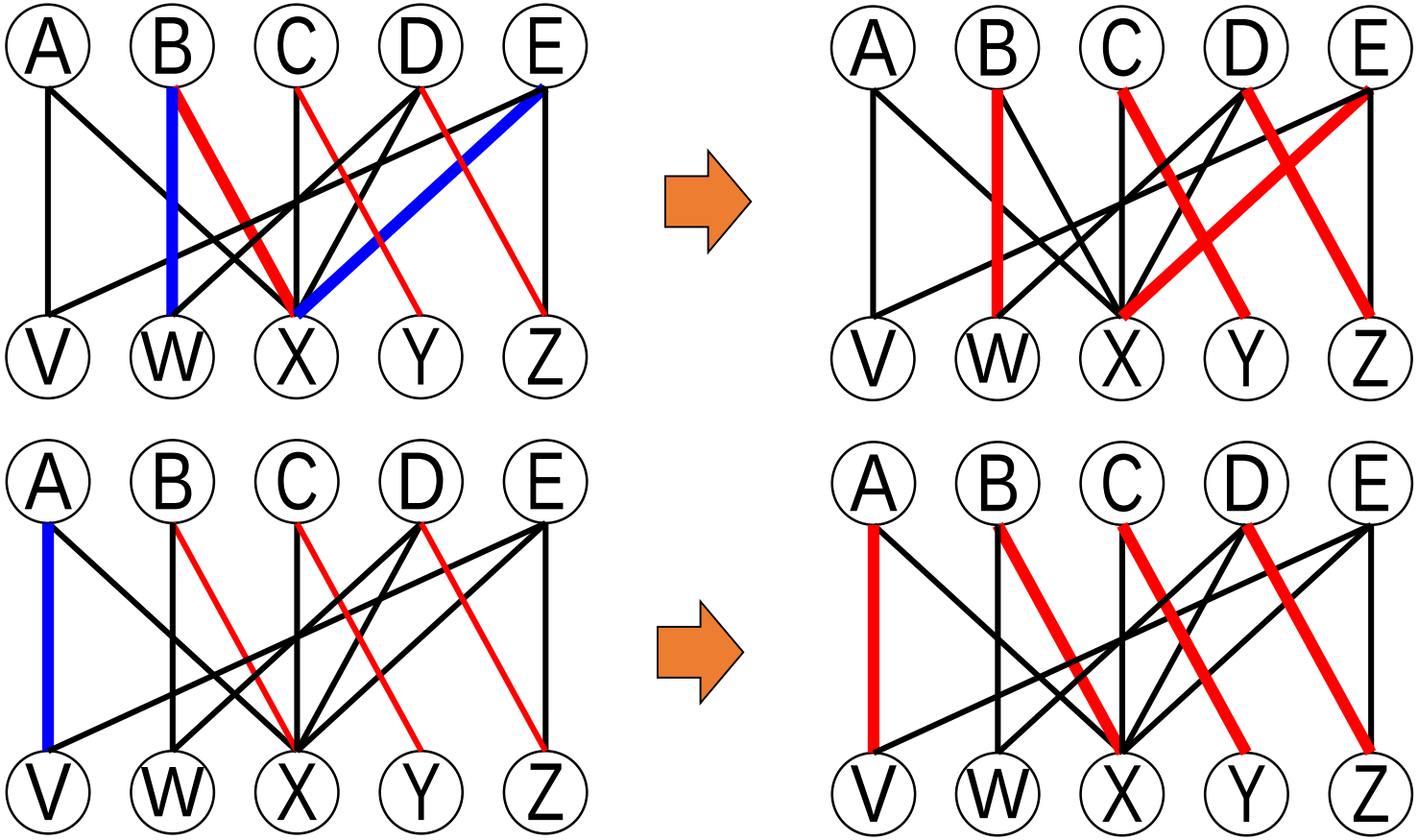
交互路でない例



条件(ii)を満たさない
è 枝を入れ替えても
マッチングにならない

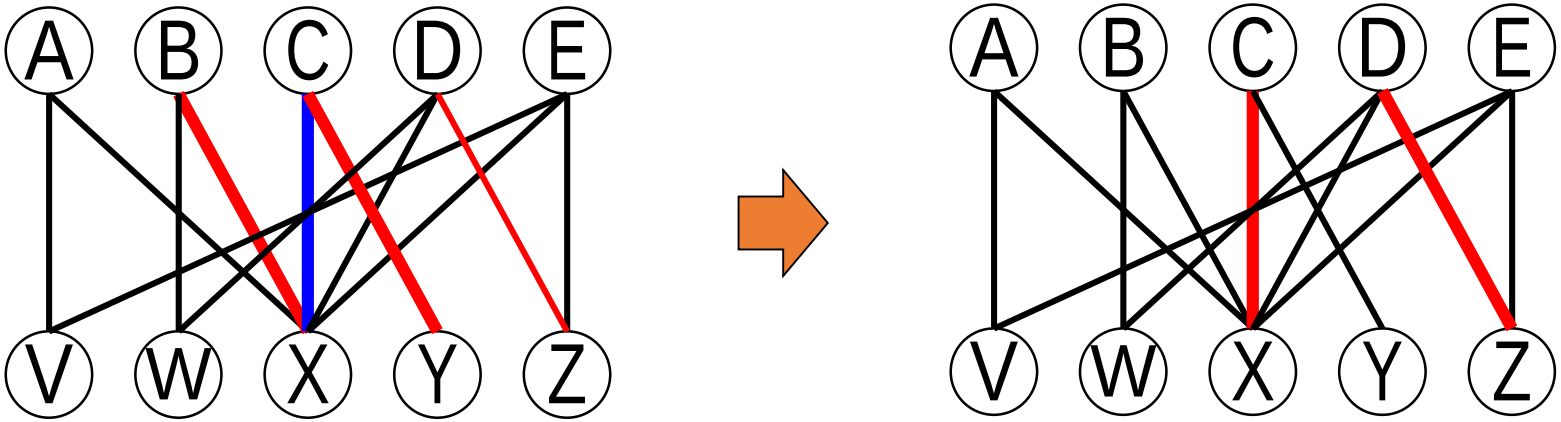
マッチングに関する交互路

交互路タイプ1：M以外の枝数＝Mの枝数＋1
(枝を入れ替えるとマッチングの枝数が1増える)
è 増加路と呼ばれる

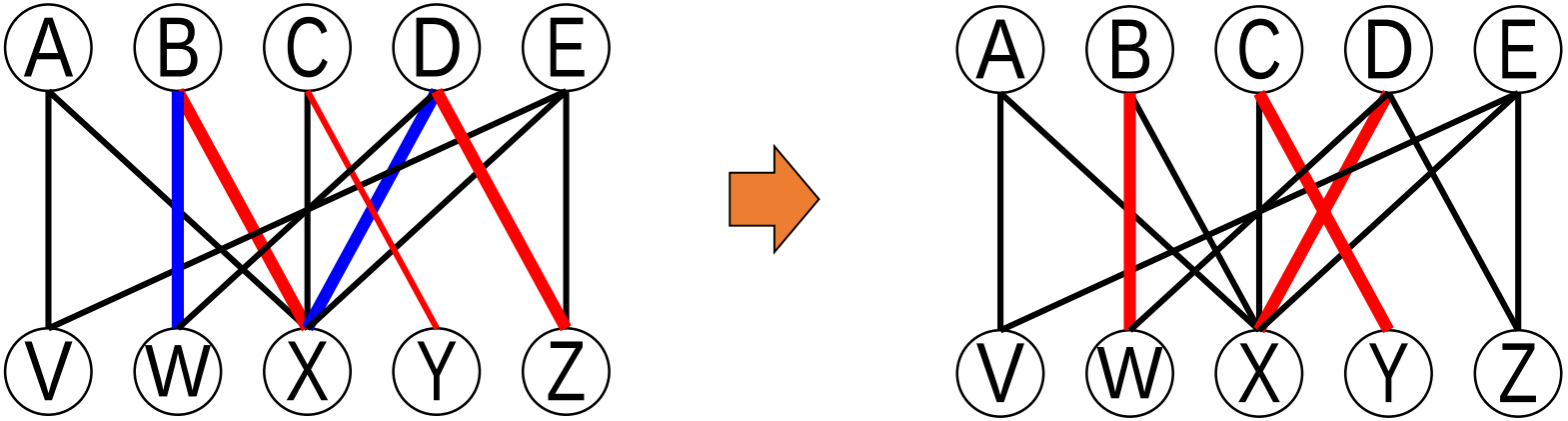


マッチングに関する交互路

交互路タイプ2：M以外の枝数＝Mの枝数－1
(枝を入れ替えるとマッチングの枝数が1減る)



交互路タイプ3：M以外の枝数＝Mの枝数
(枝を入れ替えても，マッチングの枝数は不変)

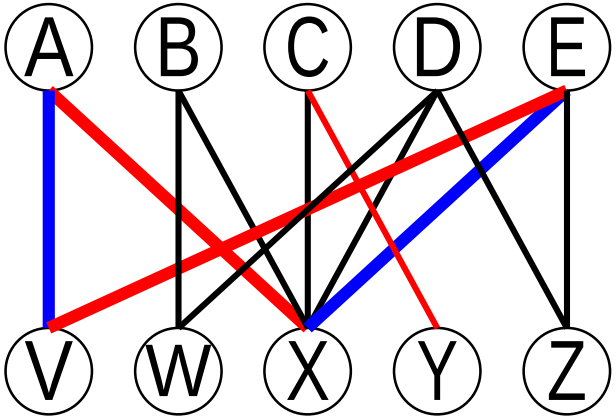


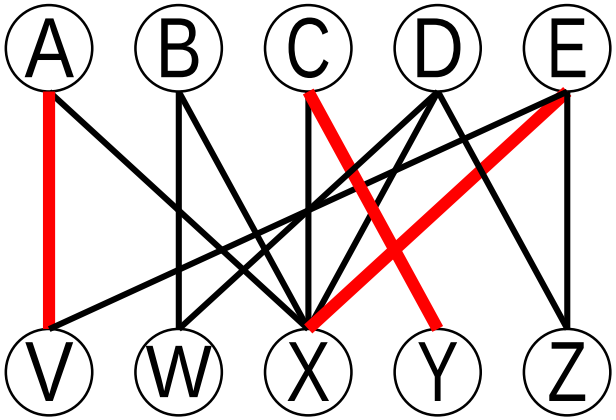
マッチングに関する交互閉路

定義：マッチング Mに関する**交互閉路**
＝Mの枝とM以外の枝が交互に現れる閉路

交互閉路では，「M以外の枝数＝Mの枝数」
è 枝を入れ替えても，マッチングの枝数は不変

交互閉路の例





交互路によるマッチングの更新

命題 マッチングMに対し，
路Pは (Mに関する) 交互路
ç è Pを使ってMの枝を入れ替えると，新しいマッチングM'ができる

$$M' = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$$

命題 マッチングMに対し，
Mに関する**増加**路が存在 è Mは最大マッチングではない
(対偶：Mは最大マッチング è Mに関する**増加**路が存在しない)

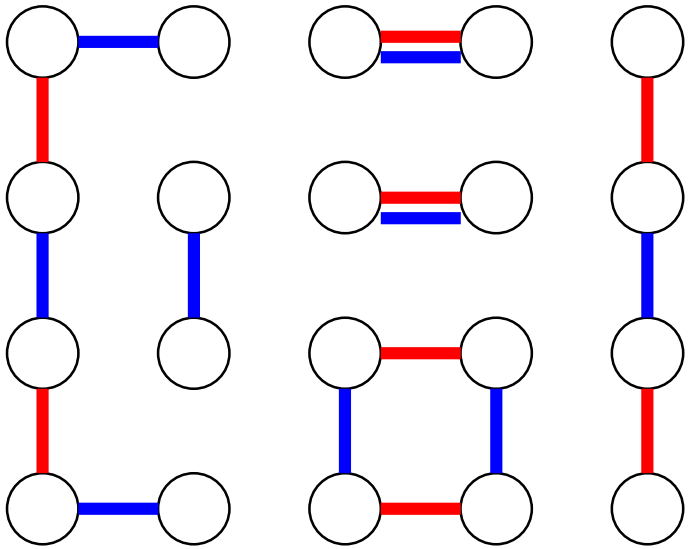
逆も成立する

命題 マッチングMに対し，
Mに関する**増加**路が存在 ç Mは最大マッチングではない
(対偶：Mは最大マッチング ç Mに関する**増加**路が存在しない)

交互路によるマッチングの最適性条件

命題 マッチングMに対し，
Mに関する**増加**路が存在 ç Mは最大マッチングではない
(対偶：Mは最大マッチング ç Mに関する**増加**路が存在しない)

(証明) 最大マッチングをM*とおく è |M*| > |M|
枝集合$(M^* \setminus M) \cup (M \setminus M^*)$に注目
è 幾つかの (Mに関する)
交互路・交互閉路からなる
(∵各頂点にはMの枝が高々1つ，
M*の枝が高々一つ，接続しているから)
その中に，増加路 (タイプ1の交互路) が
必ず存在
(∵タイプ2，3の交互路，交互閉路は
いずれも「Mの枝数≦M*の枝数」
è 合計すると，|M*|≦|M|となり矛盾)



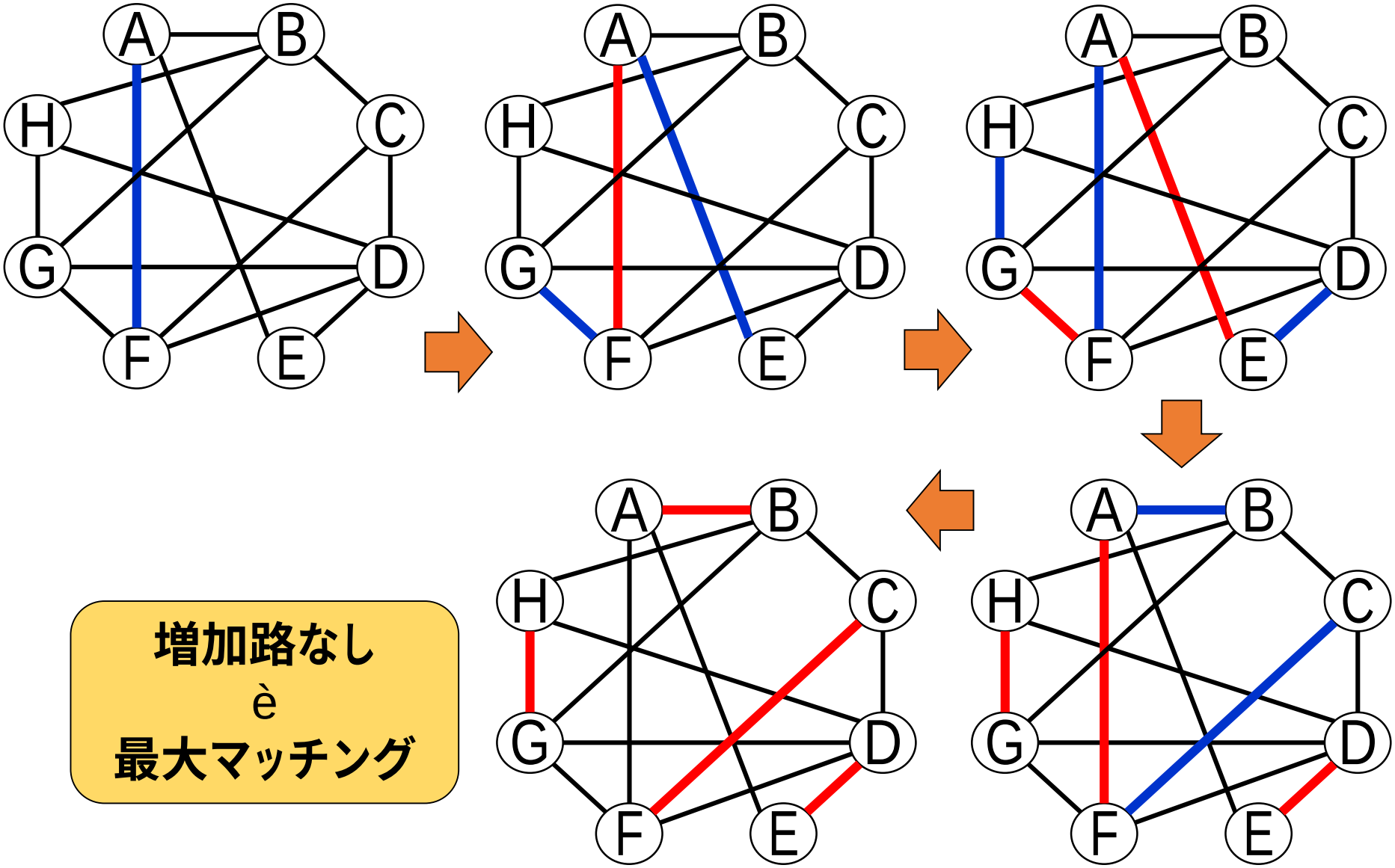
最大マッチングの計算

最大マッチング問題のアルゴリズム

「Mは最大マッチング ç è Mに関する増加路が存在しない」
これに基づき, 次のアルゴリズムが得られる

ステップ0：初期マッチングを$M := \emptyset$とする.
ステップ1： Mに関する増加路の存在をチェック.
存在しない è 現在のMは最大マッチング (終了)
存在する è ステップ2へ.
ステップ2：Mに関する増加路 P をひとつ見つけ,
P を用いて M を更新 ($M := (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$)
ステップ1へ.

アルゴリズムの実行例

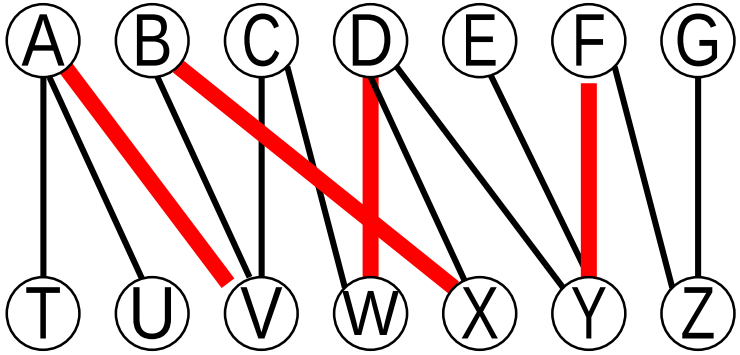


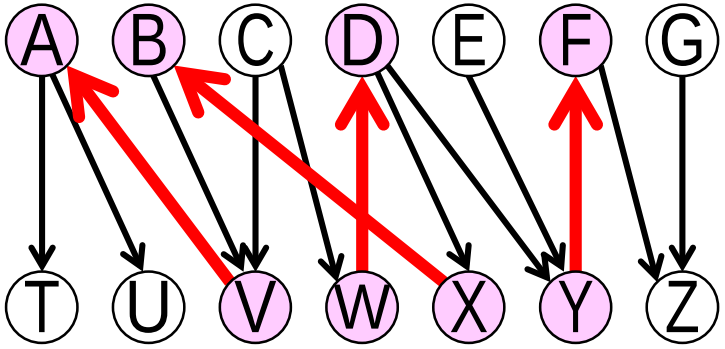
増加路なし
è
最大マッチング

増加路の見つけ方：二部グラフの場合

- 増加路を見つける問題は，有向路を見つける問題に帰着できる
- 二部グラフの頂点集合が V_1, V_2 に分かれているとき，
  - マッチングMの枝は，V_2 の頂点から V_1 の頂点に向き付け
  - それ以外の枝は，V_1 の頂点から V_2 の頂点に向き付け
- V_1 の頂点のうち，
  - マッチングの枝が接続している頂点の集合 à U_1
  - 残りの頂点の集合 à T_1
- U_2, T_2 も同様に定義

ピンクの頂点：U_1とU_2
白い頂点：T_1とT_2



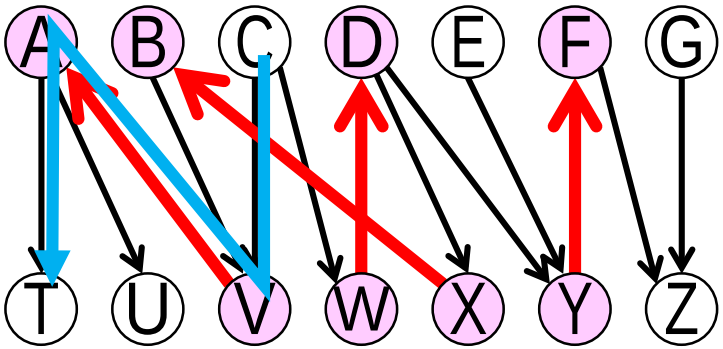


増加路の見つけ方：二部グラフの場合

- 新しい有向グラフにおける T_1 の頂点から T_2の頂点への有向路
  ß à 元の二部グラフの (Mに関する) 増加路

∴有向グラフにおいて，上記のような有向路を求めればよい
(有向路を見つける効率的なアルゴリズムは幾つか存在)

ピンクの頂点：U_1とU_2
白い頂点：T_1とT_2



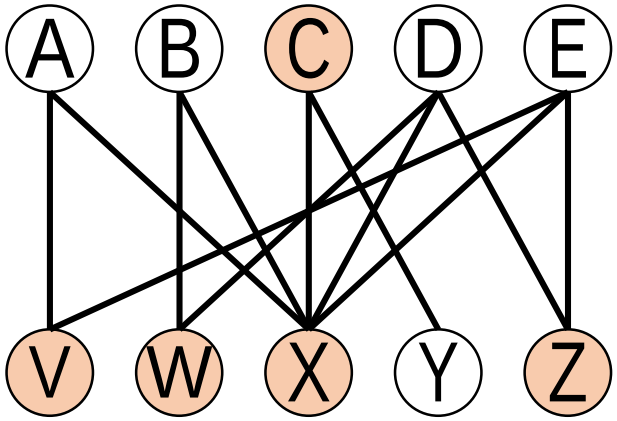
一般のグラフでも，
増加路の計算は
「効率的」に
できる，
でも計算方法は
かなり複雑

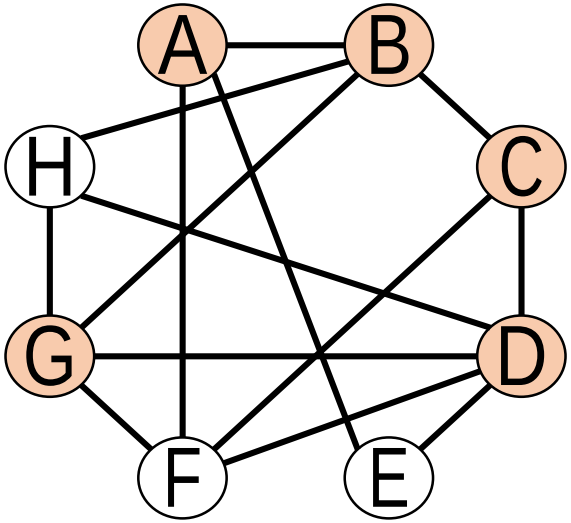
最大マッチング最小被覆定理

グラフの頂点被覆

- マッチングが**最大でない**証拠は？ à 増加路
- マッチングが**最大である**証拠は？

定義：グラフの頂点集合Sは**頂点被覆**
ç è グラフの各枝(u,v)に対し $u \in S$ または $v \in S$
$(u, v \in V \setminus S$ となる枝(u,v)が存在しない)

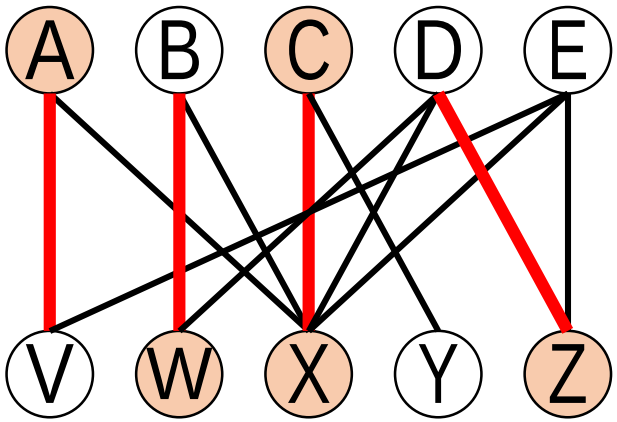


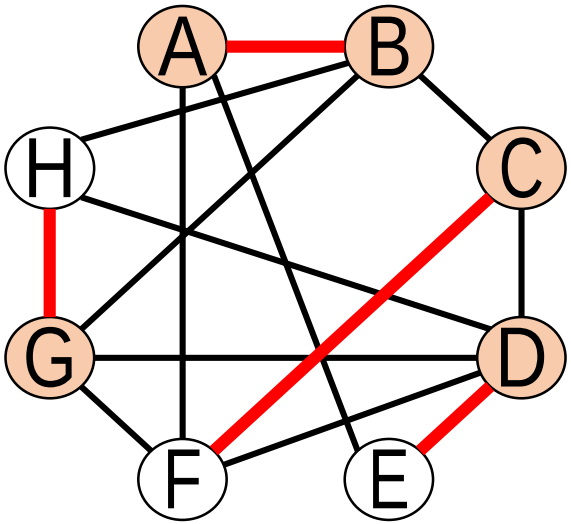


頂点被覆とマッチング

- マッチングM, 頂点被覆 S に注目
- 各マッチング枝は, S の異なる頂点に接続

命題　任意のマッチングMと頂点被覆 Sに対し，　|M|≦|S|





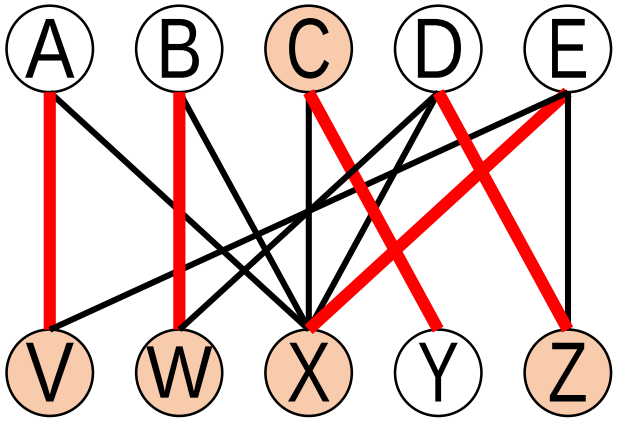
系　任意のマッチングMと頂点被覆 Sに対し，
|M|＝|S|　è　M は最大マッチング (S は頂点数最小の被覆)

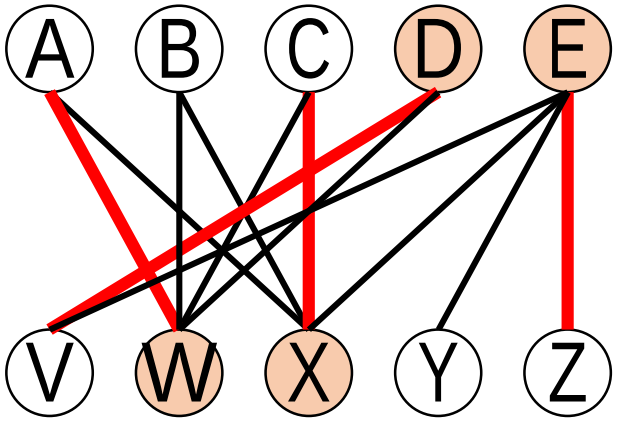
最大マッチング最小被覆定理

一般のグラフでは
成り立たない

最小（頂点）被覆＝頂点数最小の頂点被覆

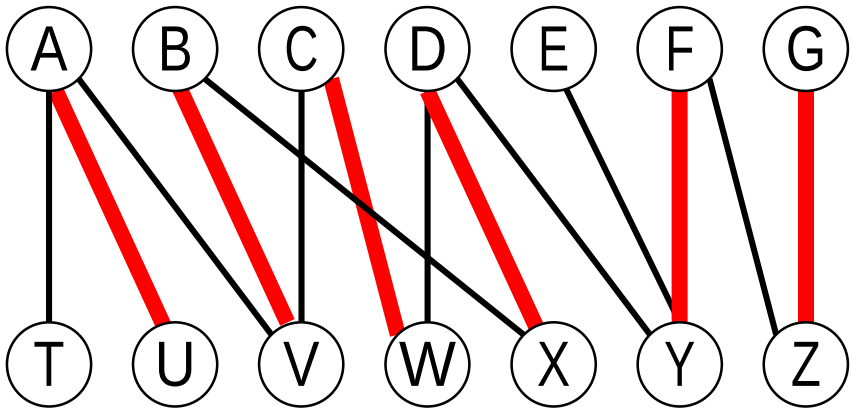
定理（最大マッチング最小被覆定理, Kőnig（ケーニグ）の定理）
二部グラフにおいて，
最大マッチングの枝数＝最小頂点被覆の頂点数

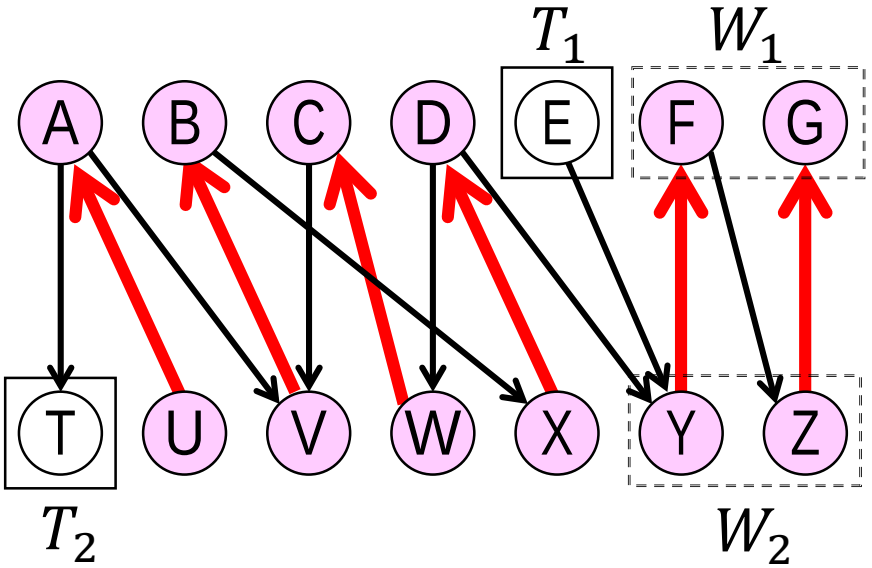




最大マッチング最小被覆定理の証明 (1)

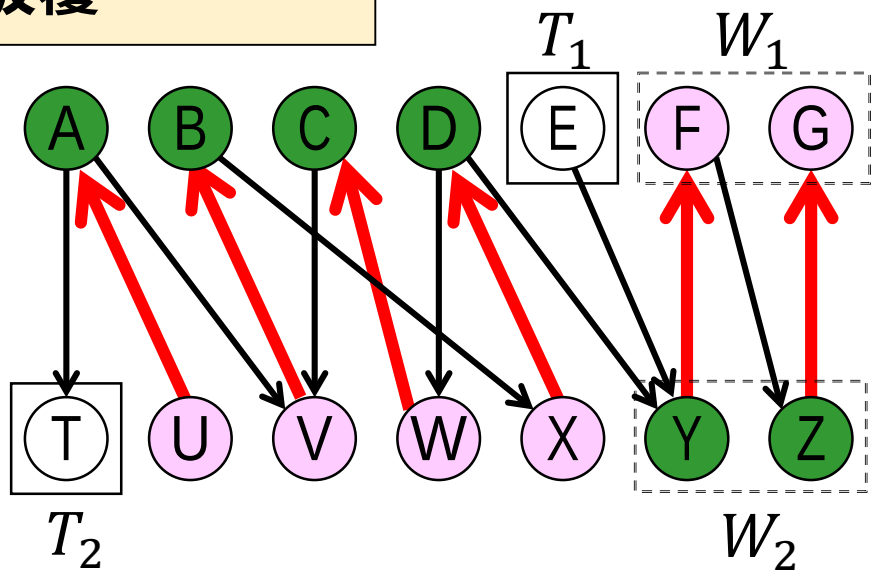
- 最大マッチング M* を利用　(すでに計算済みとする)
- 増加路の計算のときと同様に，有向グラフおよび U_1, T_1, U_2, T_2 を定義
  - 増加路は存在しない è T_1からT_2への有向路は存在しない
- W_2＝有向グラフにおいて，T_1から到達可能なV_2の頂点の集合
  - $T_2 \cap W_2 = \emptyset$ 成立　è　$W_2 \subseteq U_2$
- W_1＝マッチングM*において，W_2の相手となる頂点の集合
  - $W_1 \subseteq U_1$





最大マッチング最小被覆定理の証明 (2)

命題 $S = (U_1 \setminus W_1) \cup W_2$ **は頂点被覆**



- $|W_1|=|W_2|$, $|M^*|=|U_1|$ **なので,** $|S|=|M^*|$

(**とくに,** S **は最小頂点被覆**)

命題の証明:

すべての枝が S **に接続している**

ことを示せば良い.

(1) **マッチングの各枝:** S **の定義より,** S **のいずれかの頂点に接続**

(2) **マッチング以外の枝** (u,v), $u \in V_1, v \in V_2$:

(i) $v \in W_2$ **の場合:** $W_2 \subseteq S$ **なので,** S **に接続**

(ii) $v \notin W_2$ **の場合:** v **は** T_1 **から到達不可能,** W_1 **は** T_1 **から到達可能**

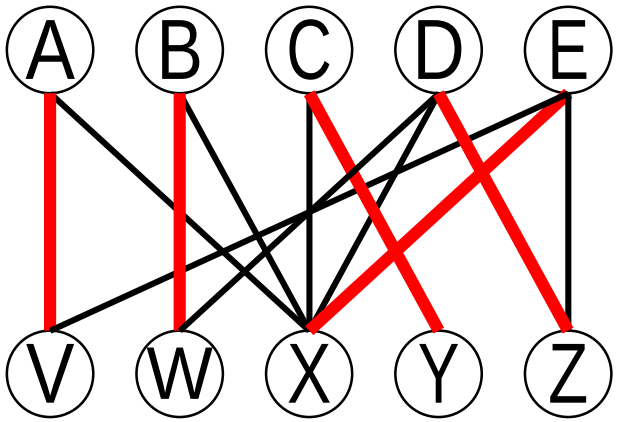
∴ u **は** $T_1 \cup W_1$ **に含まれない** è $u \in U_1 \setminus W_1$

ホールの定理

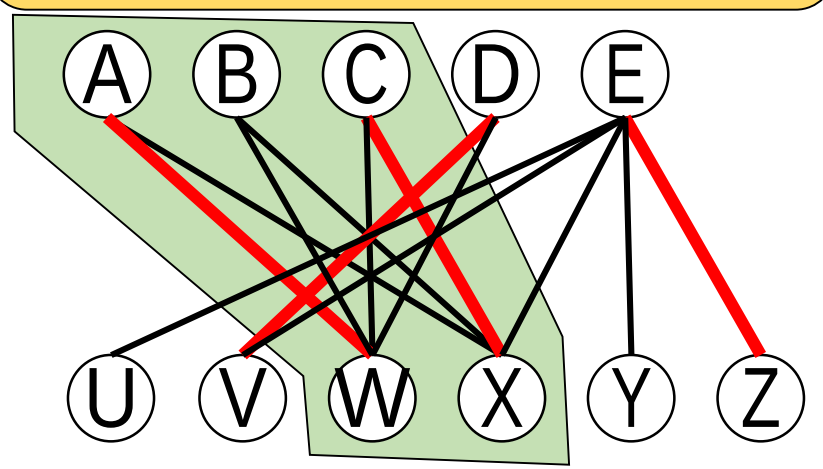
全員への割当可能性の判定

労働者全員に仕事を割り当てることができるか？

{A,…,E}全員に割り当て可能



Bには割り当てなし
è 割当方法を修正して，
全員に割り当てられるか？



命題

ある労働者の集合に対し，
「その労働者に割当可能な
仕事の数＜労働者の数」
è 全員への割当は不可能

A,B,Cに割当可能な仕事 = {W,X}
∴A,B,C全員に仕事を
割り当てることは不可能

ホールの定理

マッチングの言葉での言い換え：

頂点集合$V_1 \cup V_2$の二部グラフにおいて，

V_1の頂点全てに接続するマッチングが存在するか？

命題　ある$X \subseteq V_1$に対し，「|X| ＞ Xに隣接するV_2の頂点数」

è V_1の頂点全てに接続するマッチングは存在しない

(対偶：V_1の頂点全てに接続するマッチングが存在

è 任意の$X \subseteq V_1$に対し，「|X| ≦ Xに隣接するV_2の頂点数」)

逆も成り立つ

定理 (Hall (ホール) の定理)

二部グラフにおいて，

V_1の頂点全てに接続するマッチングが存在

ç è 任意の$X \subseteq V_1$に対し，|X| ≦ Xに隣接するV_2の頂点数

ホールの定理：証明

[è] V_1の頂点全てに接続するマッチングMが存在

$V_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$, $M = \{(u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n)\}$ とおく

任意の$X = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}\} \subseteq V_1$に対し,

$\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$は X に隣接　∴ |X| ≦ Xに隣接する$V_2$の頂点数

[ç] **最大マッチング最小被覆定理**をつかう

「V_1が最小被覆」と仮定 è 最大マッチングの枝数 = $|V_1|$

è 最大マッチングは V_1の頂点全てに接続する

以下, V_1が最小被覆であることを証明すればよい

ホールの定理：証明（続き）

任意の頂点被覆 S に対し，$|S| \geqq |V_1|$ を示す

$S_1 = S \cap V_1, S_2 = S \cap V_2,\ V_1' = V_1 \setminus S_1$ とおく

$u \in V_1'$ に接続する枝(u,v)は S_1 で

被覆されない è $v \in S_2$

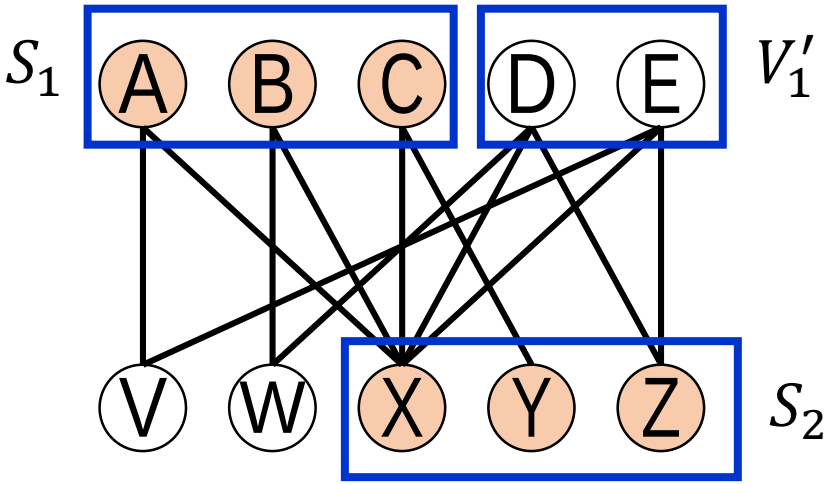
$\therefore V_1'$に隣接するV_2の頂点$\subseteq S_2$

仮定より，

$|V_1'| \leq V_1'$に隣接するV_2の頂点数

$\leq |S_2|$

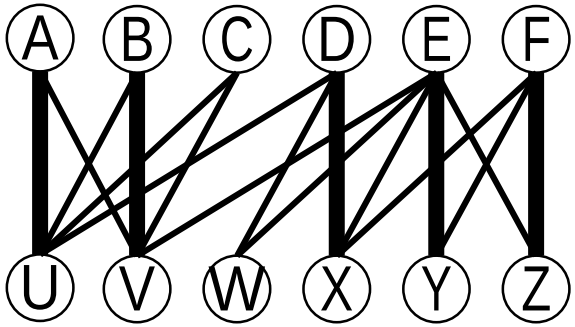
$\therefore |S| = |S_1| + |S_2| \geq |S_1| + |V_1'| = |V_1|$



演習問題

問1：次ページのグラフの最大マッチングを，スライド14のアルゴリズムにより求めよ．各反復でのマッチングと使った増加路を（図を使って）明記すること．
（増加路の求め方は，説明する必要なし）

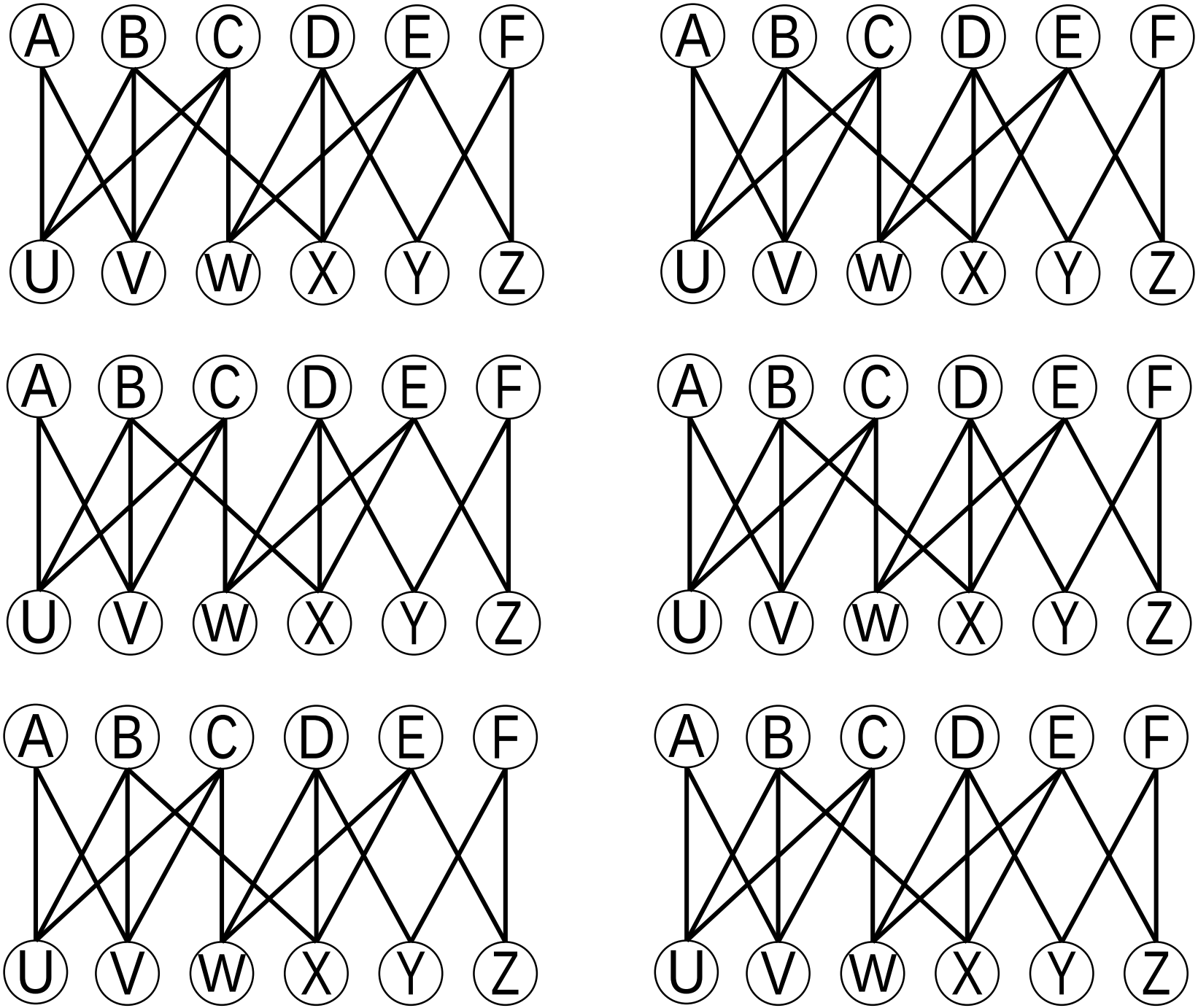
問2：右のグラフおよび最大マッチング（太線）を利用して，最小頂点被覆を求めよ．
スライド23の命題を参考にすること．



問3：最大マッチングの枝数と，最小頂点被覆の頂点数が一致しないグラフの例を1つ挙げよ（ヒント：頂点数≦4の例がある）

問4：授業の感想，意見，コメントなど書いてください．

問1


A B C D E F
U V W X Y Z
A B C D E F
U V W X Y Z
A B C D E F
U V W X Y Z
A B C D E F
U V W X Y Z
A B C D E F
U V W X Y Z
A B C D E F
U V W X Y Z