数理経済学
第3回
最短路問題

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

最も短い経路を求める

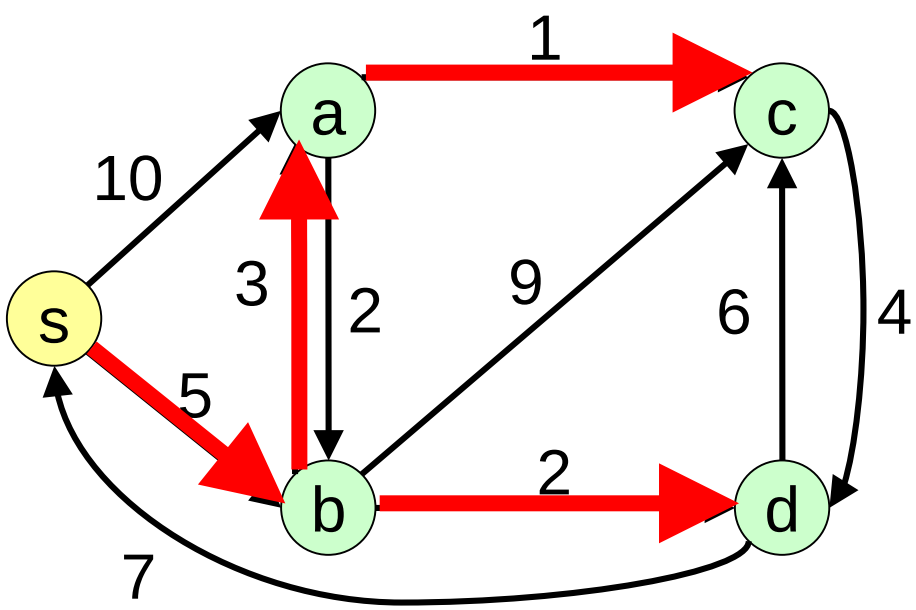
駅から
勾当台までの
最短経路を
求めたい
è グラフを使って
モデル化

各頂点の間に距離
(移動時間) を与える

(単一始点全終点) 最短路問題

枝の長さが
負の場合も扱う

- 入力：有向グラフ G=(V, E)
  各枝の長さ $\ell(e)$ $(e \in E)$, 始点 s∈V
- 出力：s から すべての頂点 v への最短路P(v)とその長さd(v)
  (sからvへの最短路 P*
  = sからvへの有向路のうち，枝の長さの和 $\ell(P^*)$が最小のもの)



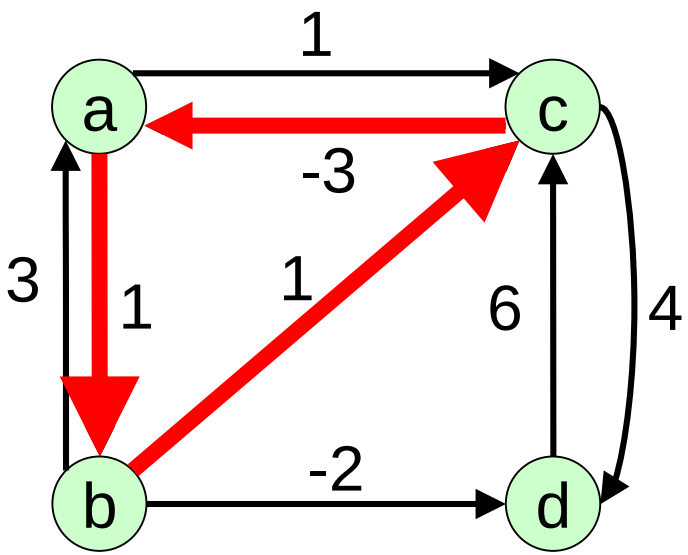
有向グラフ：
枝に向きの付いたグラフ
無向グラフ：
枝の向きの付いていないグラフ
(最小全域木問題で用いた)

有向路：
路の各枝の向き付けが，
路の向き付け (始点から終点への向き) と同じ

関連する問題：グラフの負閉路の検出

- 入力：有向グラフ G=(V, E)
  各枝の長さ $\ell(e)$ $(e \in E)$
- 出力：グラフに負閉路が「存在する」または「存在しない」の答え
  存在するときは，負閉路を求める

（負閉路 = 有向閉路のうち，枝の長さの和が負のもの）



有向閉路：
閉路路の各枝の向き付けが同じ

応用：通貨両替の問題（鞘取，さやとり）

- 手持ちのお金をうまく両替して，儲けることは可能か？

入力：各国の通貨（JPY, EUR, USD, GBPなど）
　　通貨の両替レート（1USD=120JPYなど）
出力：手持ちのお金を増やす両替方法は存在するか？

from\to	100JPY	EUR	USD	GBP
100JPY	1	0.76	0.82	0.55
EUR	1.3	1	1.1	0.70
USD	1.2	0.9	1	0.65
GBP	1.8	1.4	1.5	1

100 JPY
à 0.76 EUR
à 076x1.1 USD
à 0.76x1.1x1.2
　=100.32 JPY

応用：通貨両替の問題（続き）

グラフを使って表現

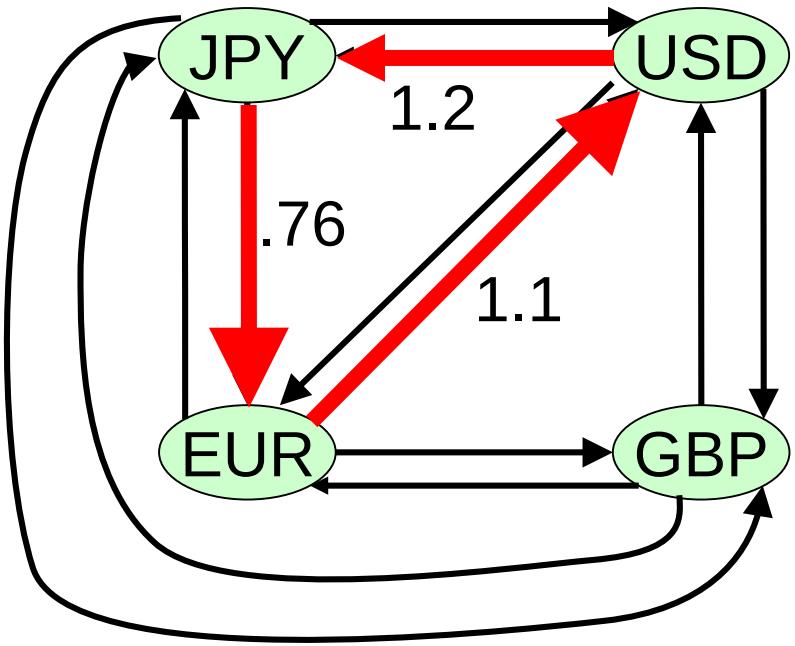
通貨X**から通貨**Y**への両替** ß à **枝**(X,Y)

両替レート = **枝**(X,Y)**の重み**

è **元の通貨に戻る両替の組合せ** ß à **有向閉路**

金額の変化率 = **有向閉路に含まれる枝の重みの積**

この値>1 ç è **金額増加**



100 JPY
à 0.76 EUR
à 076x1.1 USD
à 0.76x1.1x1.2
=100.32 JPY

閉路の重みを長さに変換して，「重みの積>1 ç è **長さの和が負」が成り立つようにする**
（**ヒント**：log ab
=log a + log b）

関連する問題：差分不等式系

- 入力：n 個の変数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ からなる，次の形の不等式系

$$p_i - p_j \leq \alpha_{ij}, \quad \beta_i \leq p_i \leq \gamma_i$$

- 出力：不等式系に解が「ある」または「ない」の答え
  存在するときは，解を求める

具体例

$$p_2 - p_1 \leq 1,\ p_3 - p_1 \leq 1,$$
$$p_3 - p_2 \leq 3,\ p_4 - p_2 \leq 5,$$
$$p_4 - p_3 \leq 4,\ p_3 - p_4 \leq 6,$$
$$p_1 = 0,\ p_4 \leq 5$$

⇒

解あり

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0,1,1,5)$$

応用：プロジェクトスケジューリング

- 幾つかの作業 i=1,2,..., n からなるプロジェクト（例：自動車製造）
  - 最初の作業 1, 最後の作業 n
- 各作業 i の開始時間 s_i, 終了時間t_i に関する制約
  - $s_1 = 0, t_n \leq D$ （プロジェクトの開始終了時間に関する制約）
  - $t_i - s_i \geq = \leq \alpha_i$ （各作業の処理時間に関する制約）
  - $s_j - t_i \geq = \leq \beta_{ij}$ （作業のペアに関する制約）

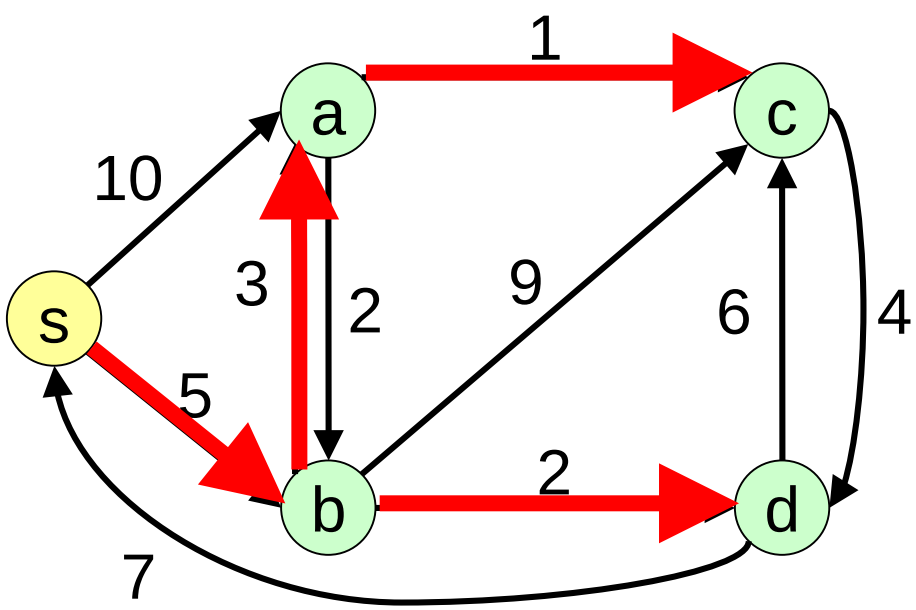
- 制約を満たすスケジュールは存在するか？
  - 存在するならば, 終了時間最小のスケジュールを求めたい

最短路の性質

(単一始点全終点) 最短路問題

枝の長さが
負の場合も扱う

- 入力：有向グラフ G=(V, E)
  各枝の長さ $\ell(e)$ $(e \in E)$, 始点 s∈V
- 出力：s から すべての頂点 v への最短路P(v)とその長さd(v)
  (sからvへの最短路
  = sからvへの有向路P*のうち，枝の長さの和$\ell(P^*)$が最小のもの)

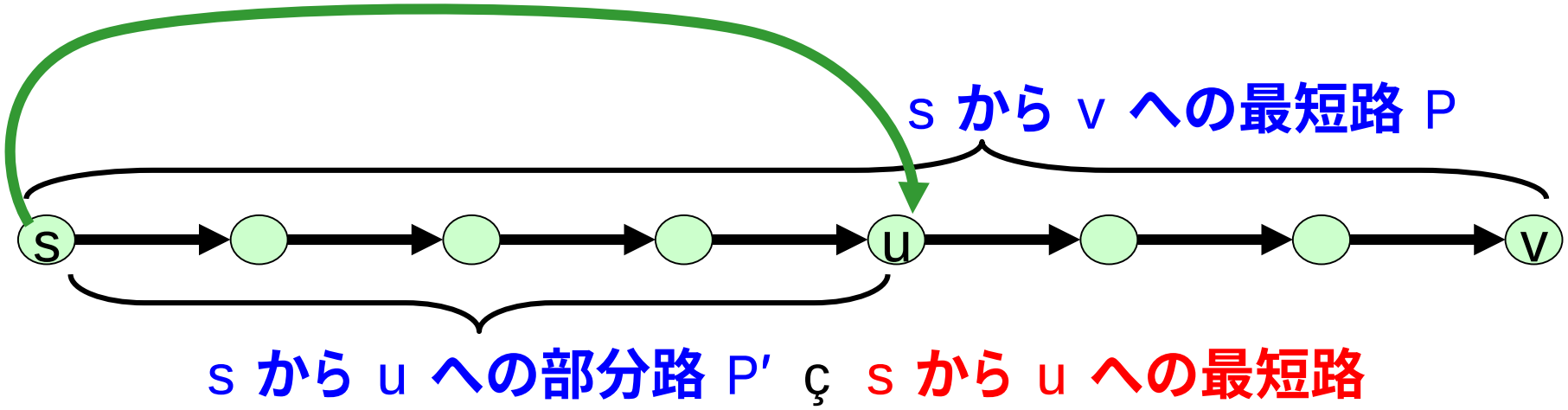


以降で使う仮定：
s から各頂点 v への有向路が存在する
(存在しない場合は
枝(s,v)を追加，その長さを
十分大きい正数とする)

注意：有向路は，同じ頂点，枝を何回通っても可

最短路の部分路は最短路

命題　P: 頂点 s から頂点 v への最短路
　P は途中に頂点 u を含むと仮定
　è s から u への P の部分路 P' は, s から u への最短路

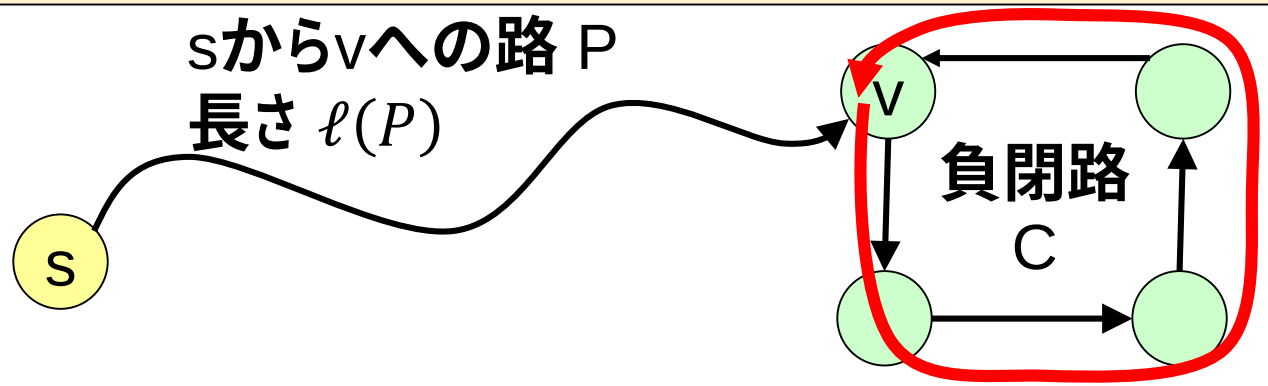


(証明の概略) もしP'より短い路が存在したら
　　à sからvへの(P'経由の) より短い路が存在する (矛盾)

負閉路と最短路

- 負閉路が存在 è ある頂点への最短路は存在しない
- 全ての頂点への最短路が存在 è 負閉路は存在しない

命題　グラフに負閉路 C が存在 (長さ$\ell(C) < 0$)
è C に含まれる各頂点 v に対し,
inf{ s から v への路の長さ } = − ∞　(最短路が存在しない)

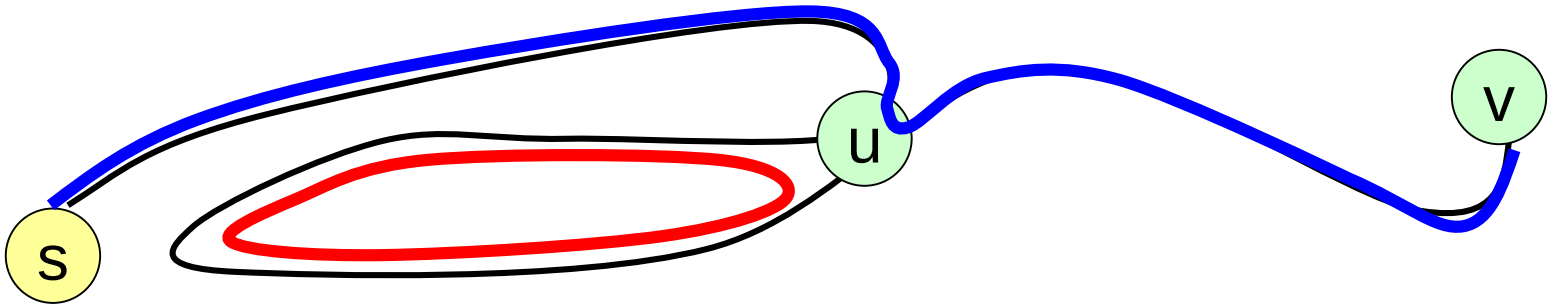


(証明) sからvへの路として, 次のようなものを考える:
路 P を使って s から v に行く à 負閉路を k 回通って v に戻る
これも s から v への路, 長さ $\ell(P) + \ell(C) \times k$
k を任意に大きくする è 路の長さが任意に小さくなる

負閉路と最短路 (続き)

命題負 負閉路が存在しない è 各頂点への最短路は存在
(対偶：ある頂点への最短路が存在しない è 負閉路は存在)

(証明) P*: 枝数が s から v への，|V|-1 以下の路の中で最短
次の命題を示せば良い．
(A) s から v への，枝数が|V|以上の任意の路 P に対し $\ell(P^*) \leq \ell(P)$
命題(A)を示すには，次の(B)を示せば良い (なぜか？)
(B) s から v への，枝数が|V|以上の任意の路 P に対し，
　枝数がPより少ない v への路 P' が存在して，$\ell(P') \leq \ell(P)$

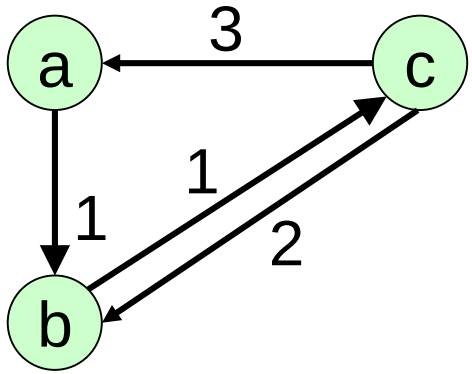


sからvへの路 P，枝数≧|V| è 同じ頂点 (u とする) が2回現れる
u から u への部分路は閉路 è 長さは非負
　è 削除すると，枝数が少なく，長さが短い路 P' を得る

ポテンシャルと負閉路

最短路問題における
便利な道具

定義: 実数 $p(v)(v \in V)$ **はポテンシャル**
ç è 各枝(u,v)に対し $p(v) - p(u) \leq \ell(u,v)$ を満たす



$p(a) = 3, p(b) = 2, p(c) = 0$ はポテンシャル

※ポテンシャルは存在しないこともある
(例: (c,a) の枝長を-3にした場合)

命題 ポテンシャルは存在 è 負閉路は存在しない
(対偶:負閉路が存在 è ポテンシャルは存在しない)

(証明) 任意の閉路C に対し,
不等式 $p(v) - p(u) \leq \ell(u,v)$ $((u,v) \in C)$ を辺々足す
è $0 = \sum_{(u,v)\in C}[p(v) - p(u)] \leq \sum_{(u,v)\in C} \ell(u,v)$ =閉路の長さ

ポテンシャルと負閉路と最短路

命題 ポテンシャルは存在 ç 負閉路は存在しない
(対偶：負閉路が存在 ç ポテンシャルは存在しない)

「負閉路なし」の証拠になる

命題 各頂点への最短路が存在する場合，各頂点への最短路長d(v)はポテンシャル $(d(v) - d(u) \leq \ell(u, v)$成立)

(証明) 負閉路が存在しない è 最短路が存在 (スライド13の命題より)
よって，2つ目の命題を示せば良い．

P: 頂点 s から u への最短路, d(u)= P の長さ
è $\tilde{P} = P \cup \{(u, v)\}$は s から v への路，
その長さ= $d(u) + \ell(u, v) \geq$ v への最短路長=d(v)

最短路の計算

最短路長の求め方

- ベルマン･フォードのアルゴリズム(R. Bellman(1958), L. Ford, Jr.(1956))
- 各反復で，次の値を計算

$d_k(v)$ =枝数が k 以下の s から v への路の中で，最短なものの長さ

このような路は，2つのパターンあり

(1) 枝数が k-1 以下 è $d_k(v) = d_{k-1}(v)$

(2) s からある頂点 u への路（ただし枝数≦k-1） ＋ 枝(u,v)

è $d_k(v) = d_{k-1}(u) + \ell(u,v)$

∴ 次の再帰式が成立

$$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v),\ \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u,v) | (u,v) \in E\}]$$

負閉路の存在のチェック

再帰式 $d_k(v) = \min[d_{k-1}(v),\ \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u,v) | (u,v) \in E\}]$

は k=n **の場合でも成り立つ**(n=|V|)

負閉路が存在しない

è **各頂点** v **への最短路が存在する**

è **枝数≦**|V|-1 **の最短路が存在** (**命題より**)

è **全ての** v **に対して** $d_n(v) = d_{n-1}(v)$ **が成立**

負閉路 C **が存在する**

è **ある** v **に対して** $d_n(v) < d_{n-1}(v)$**が成立**

これを使って負閉路を検出

(**証明**) **すべての** v **に対して等号成立と仮定.**

再帰式の定義より

$d_n(v) = d_{n-1}(v) \leq d_{n-1}(u) + \ell(u,v)\ \ (\forall (u,v) \in E)$

è $d_{n-1}(v)$ **はポテンシャル**

è **負閉路が存在しない** (**スライド１４の命題より**)　(**矛盾**)

ベルマン・フォードのアルゴリズム

手順0：$d_0(s) = 0, d_0(v) = +\infty\ (\forall v \neq s)$ とおく．k=1とする．

- s から枝数0でたどり着けるのは s のみなので

手順1：各頂点 v に対し，以下の式で $d_k(v)$ を計算

$$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v),\ \ \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u,v) | (u,v) \in E\}]$$

手順2：k < |V| ならば k:=k+1とおいて手順1へ戻る．

k=|V| ならば手順3へ．

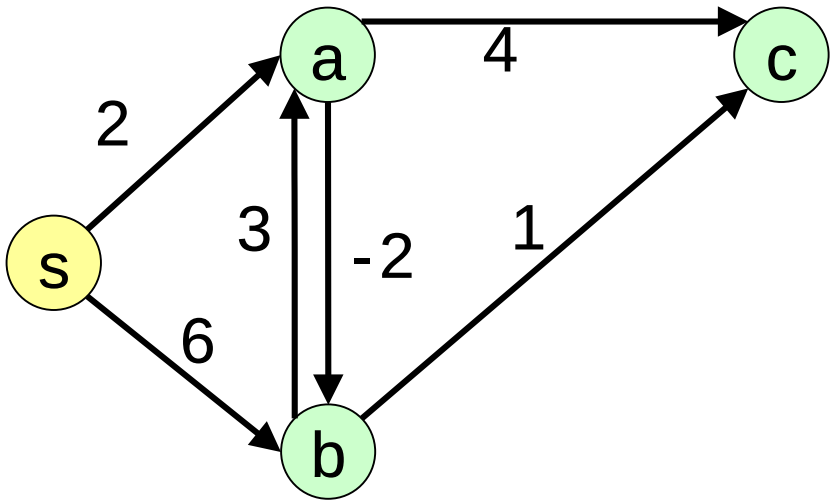
手順3：ある v に対して $d_n(v) < d_{n-1}(v)$が成立 è「負閉路存在」

全ての v に対して $d_n(v) = d_{n-1}(v)$が成立

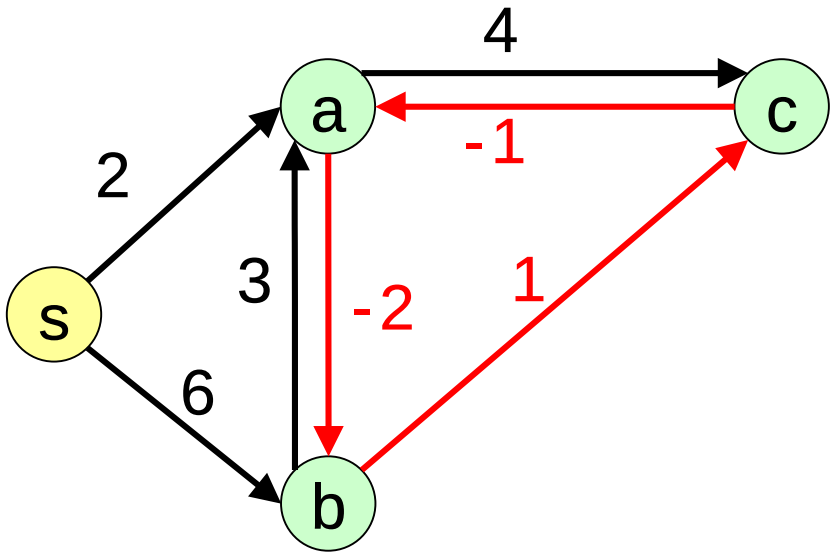
è 最短路長 $d_{n-1}(v)$ を出力

最短路長だけでなく，最短路を計算することも
(若干の修正により) 可能である

実行例



	k=0	1	2	3	4
s	0	0	0	0	0
a	∞	2	2	2	2
b	∞	6	0	0	0
c	∞	∞	6	1	1



	k=0	1	2	3	4
s	0	0	0	0	0
a	∞	2	2	2	0
b	∞	6	0	0	0
c	∞	∞	6	1	1

枝長が正の場合の最短路長の計算

枝長が正の場合の最短路長

各枝の長さが正のときの最短路の性質

- 最短路長≦0となるのは，s から s への最短路のみ
- 任意の v ≠ s に対し，ある頂点 u が存在して，

  s から v への最短路 = s から u への最短路 + (u,v)

  s から v への最短路長 > s から u への最短路長

∴最短路長は，小さい順に計算すると便利

- v_i への最短路長＝i番目に小さい最短路長 とおく

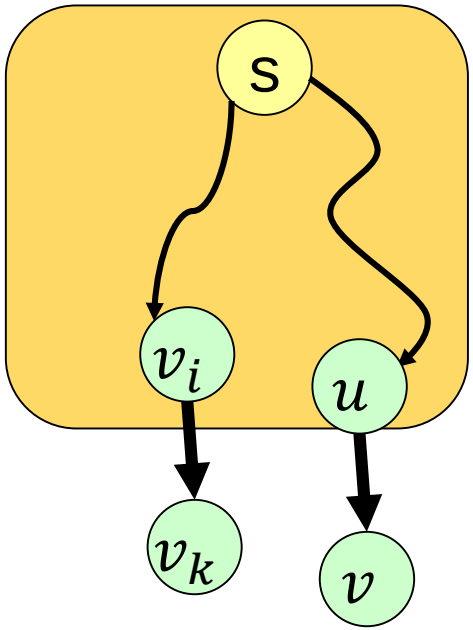
è $v_1 = s$

v_k への最短路 = あるi (≦k-1)が存在して，

v_i への最短路 + (v_i, v_k)

v_j $(j > k)$への，$\{v_1, \ldots v_{k-1}\}$経由の最短路長

≧v_j への (条件なし) 最短路長 ≧ v_k への最短路長



ダイクストラのアルゴリズム

手順0：$d(s) = 0, d(v) = +\infty\ (\forall v \neq s)$ **とおく．** T=V **とする．**

手順1：T **の要素** u **で** d(u) **最小のものを選ぶ．**

T := T – {u} **とおく．**

手順2：u **から出る各枝** (u,v) **に対し，**

$v \in T$ **かつ**$d(v) > d(u) + \ell(u, v)$ **ならば，**

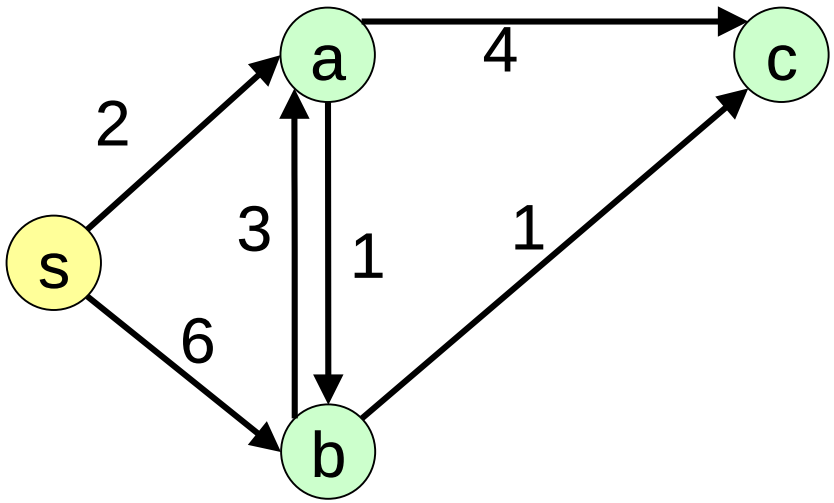
$d(v) \coloneqq d(u) + \ell(u, v)$ **とおく．**

手順3：$T = \emptyset$ è **各**v **に対して** d(v) **を出力．**

$T \neq \emptyset$ è **手順1へ．**

最短路長だけでなく，最短路を計算することも
(若干の修正により) 可能である

実行例



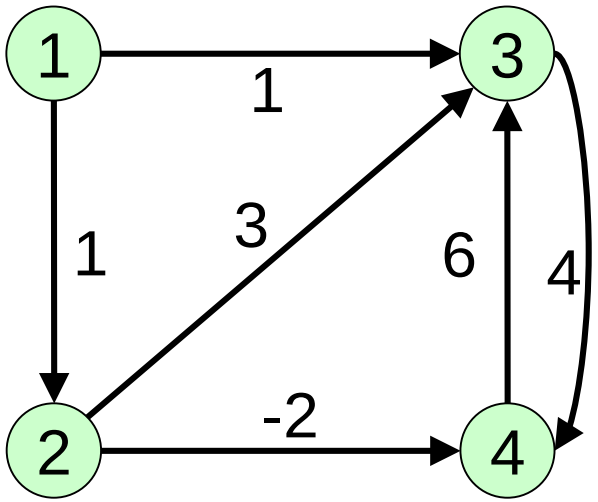
	k=0	1	2	3
s	0	0	0	0
a	∞	2	2	2
b	∞	6	3	3
c	∞	∞	6	4

差分不等式系の解の計算

変数の差の不等式系の解を求める

ケース1：全ての制約に2つの変数が現れる場合

$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1,$
$p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2,$
$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6$



差分不等式系の解
＝以下のグラフのポテンシャル

- **各変数に対応する頂点を追加**
- **各制約**$p_v - p_u \leq \alpha$**に対し，**
  長さ$= \alpha$**の枝**(u, v)**を追加**

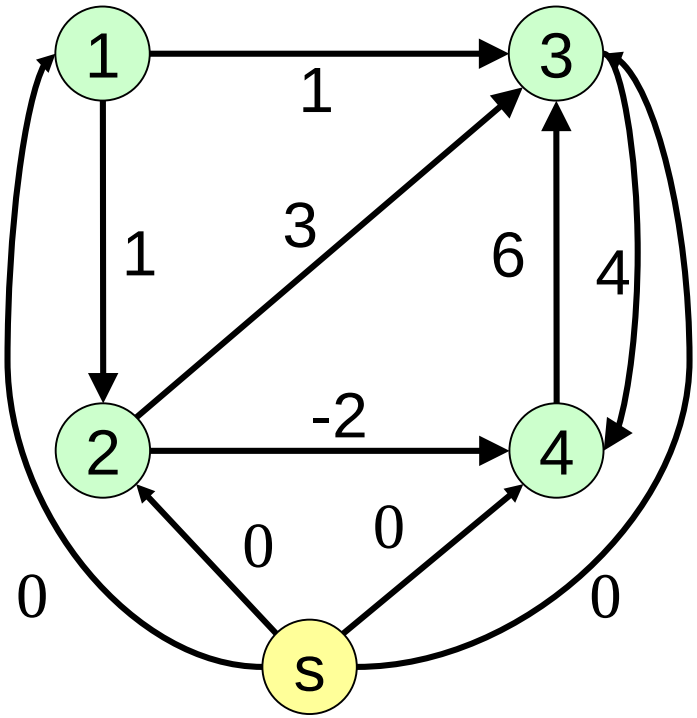
ある頂点 s から，その他の頂点へ有向路が存在する場合

スライド14,15の命題より，
負閉路が存在する è 解なし
負閉路が存在しない è 最短路長d(v)**は解**

変数の差の不等式系の解を求める

ケース1：全ての制約に2つの変数が現れる場合

$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1,$
$p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2,$
$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6$



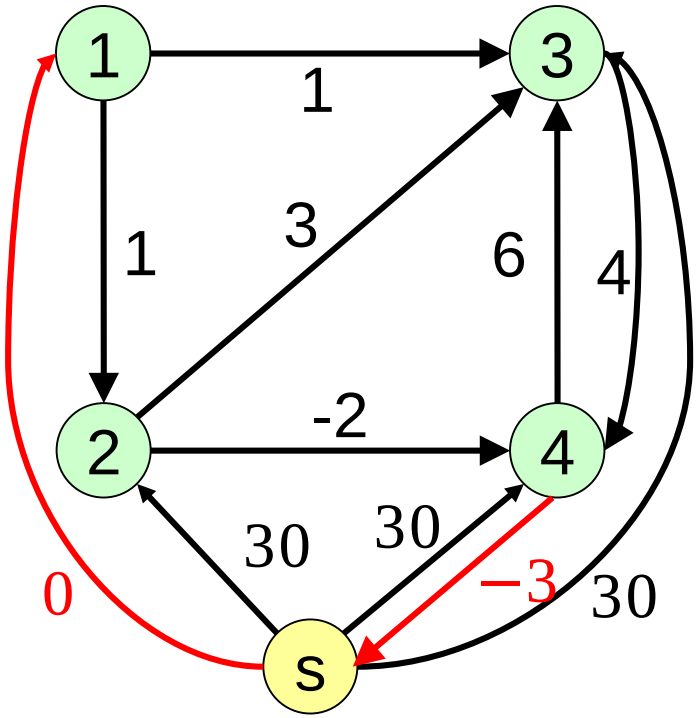
どの頂点からも，いずれかの頂点への有向路が存在しない場合

新しい変数 p_s，
自明な不等式 $p_i - p_s \leq M \ (i = 1,2,\ldots,n)$
を追加（Mは任意の実数）
è 解集合は不変(ßなぜか？)，
対応するグラフにおいて，頂点1から各頂点への有向路が必ず存在
（スライド10の仮定参照）
è 前のスライド同様に解を計算できる

変数の差の不等式系の解を求める

ケース2：変数1つの制約を含む場合

$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1,$
$p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2,$
$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6,$ $p_1 \leq 0, p_4 \geq 3$



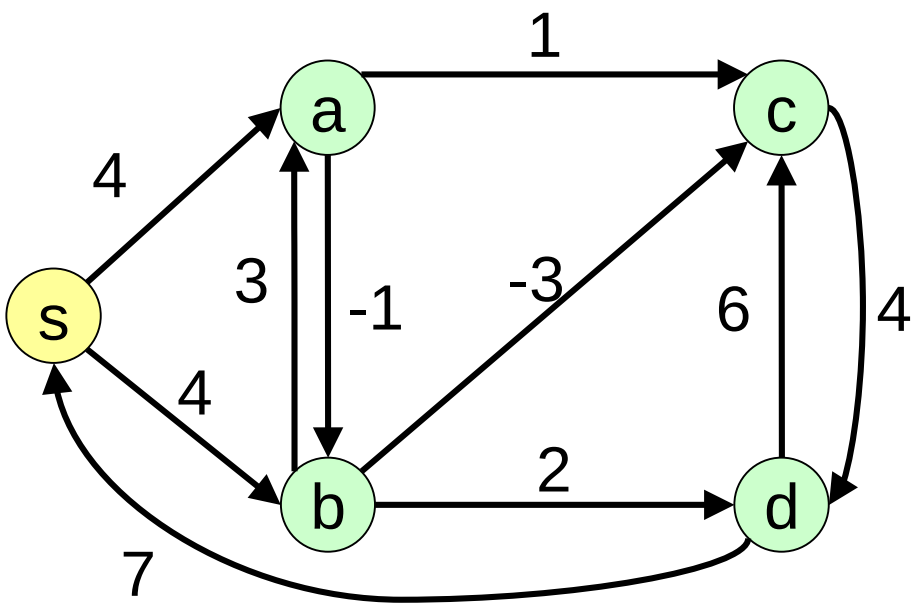
(1)変数2つの制約に変換する

- 新しい変数 s を追加（変数p_s追加）
- 各変数$p_1, \ldots, p_n$に対し，
  - $p_v \leq \beta$の形の制約が存在
    è $p_v - p_s \leq \beta$ に置き換え（長さβの枝(s,v)追加）
  - $p_v \leq \beta$の形の制約がない
    è $p_v - p_s \leq M$を追加（長さMの枝(s,v)追加．
    負閉路が新たに生じないように，Mは十分大きくとる）
  - $p_v \geq \gamma$の形の制約が存在
    è $p_s - p_v \leq -\gamma$ に置き換え（長さ$-\gamma$の枝(v,s)追加）

(2)新しい不等式系の解 p_i $(i = 1, \ldots, n)$は元の不等式系の解になる

演習問題

問1：下記のグラフにおける，s から各頂点への最短路長を，ベルマン・フォードのアルゴリズムで計算せよ．



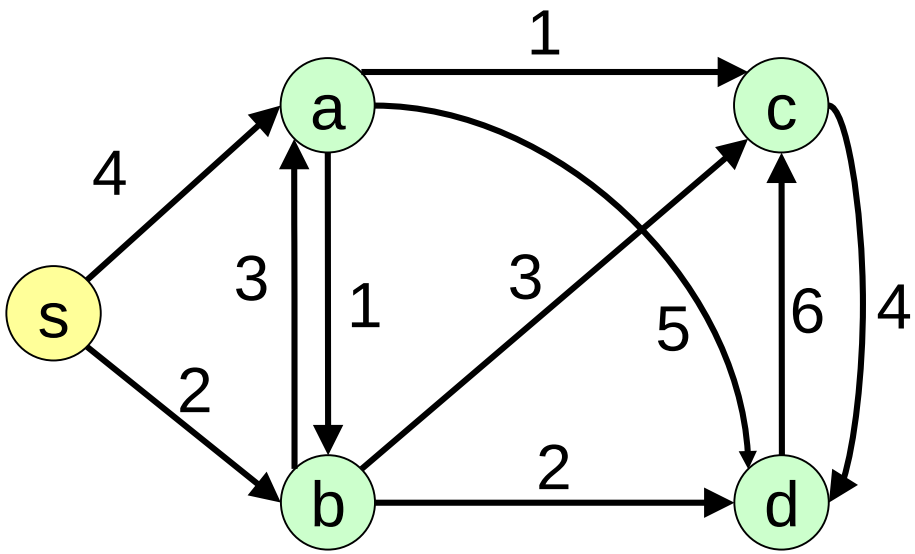
	k=0	1	2	3	4	5
s	0					
a	+∞					
b	+∞					
c	+∞					
d	+∞					

問2：次の不等式系の実行可能解を求めるか，または実行可能解をもたないことを示せ．

$$x_b - x_a \leq -1, x_a - x_b \leq 3, x_c - x_a \leq 1, x_a - x_c \leq 2,$$
$$x_c - x_b \leq -3, x_d - x_b \leq 2, x_d - x_c \leq 4,\ x_c - x_d \leq 6$$

演習問題

問3：下記のグラフにおける，s から各頂点への最短路長を，ダイクストラのアルゴリズムで計算せよ．



	n=0	1	2	3	4
s	0				
a	+∞				
b	+∞				
c	+∞				
d	+∞				

問4：ベルマン・フォードのアルゴリズム，およびダイクストラのアルゴリズムにおいて，最短路を計算するには，どのように修正したら良いか，説明せよ．

演習問題

問5：枝長が負のグラフにダイクストラのアルゴリズムを適用すると，なぜ最短路長が正しく計算できないのか？理由を説明せよ．

問6：差分不等式の解を求めるところのスライドのケース1において，
新たな不等式$p_i - p_s \leq M\ (i = 1,2,\ldots,n)$を追加しても
解集合が変化しない理由を説明せよ．
また，ケース2において，M はどの程度大きな正数をとれば良いか，説明せよ．