# 数理経済学 第1回 ガイダンス, 最小全域木問題

塩浦昭義 東京工業大学 経営工学系 准教授 shioura.a.aa@m.titech.ac.jp http://www.soc.titech.ac.jp/~shioura/teaching

#### この講義の目的

- ×「数理経済学」を学ぶ (経済の数理モデルを作り、数学的に解析する分野) 〇経済・経営工学に役立つ数理を学ぶ
- より具体的には...
- •離散的な最適解 •安定解を求める問題を紹介
  - 経済では、連続的な財だけでなく、離散的な財も扱う!
- •問題の数理構造,アルゴリズムを説明
- •経済学・経営工学との繋がりを紹介

### 今後の予定

- 最小全域木問題
- 最短路問題
- ・最大要素マッチング問題
- ・最大重みマッチング問題
- 資源配分問題
- 最大流問題
- 最小費用流問題

• ナップサック問題

・巡回セールスマン問題

近似解を求める

・財の交換問題

・安定マッチング問題

・安定マッチング問題の拡張

安定解を求める

最適解を

求める

7月8日(金)あたりに中間試験

7月末~8月上旬に 期末試験

### 授業の進め方

- 毎回の授業の流れ前回授業のレポートの解説→講義 →レポート問題の出題
- ・レポートは授業中に各自で採点後,提出してもらいます(赤ペン持参)
- ・レポート提出は任意.
  - 問題の解答が不完全でも良いので、なるべく提出すること

- 授業資料はOCWに置きます
- ・質問等はメール(簡単な質問の場合) または直接訪問(とくに成績に関する問合せの場合)してください

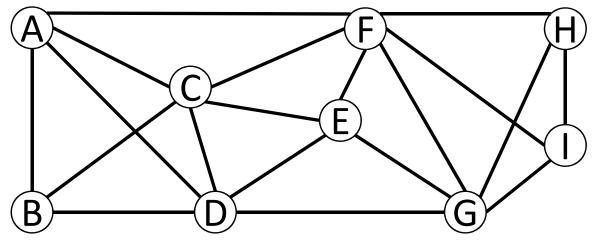
## 成績の評価方法

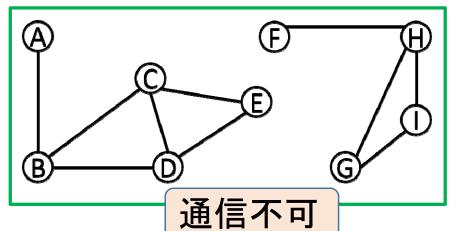
- •中間50点+期末50点 +レポートの提出状況20~30点
  - → 100点で打ち切り
  - •全体で59点以下は不合格
- •中間試験および期末試験の出来が悪くても不合格
  - それぞれ50点満点
  - •30点以上合格
  - •29点以下は不合格(試験とレポートの状況次第で救済あり)

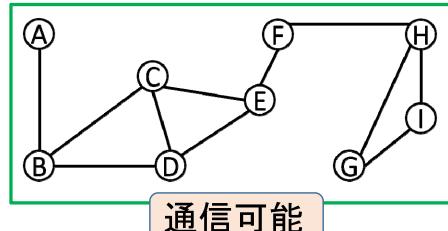
## 最小全域木の例:通信ネットワークの構築

- •大学内の通信用ネットワークを構築したい
  - 地点 A, B, ..., I をケーブルで接続, 互いに通信したい
  - 直接ケーブルで接続できるところ, できないところがある
  - ・複数のケーブルで繋がっていても可

接続可能な 地点

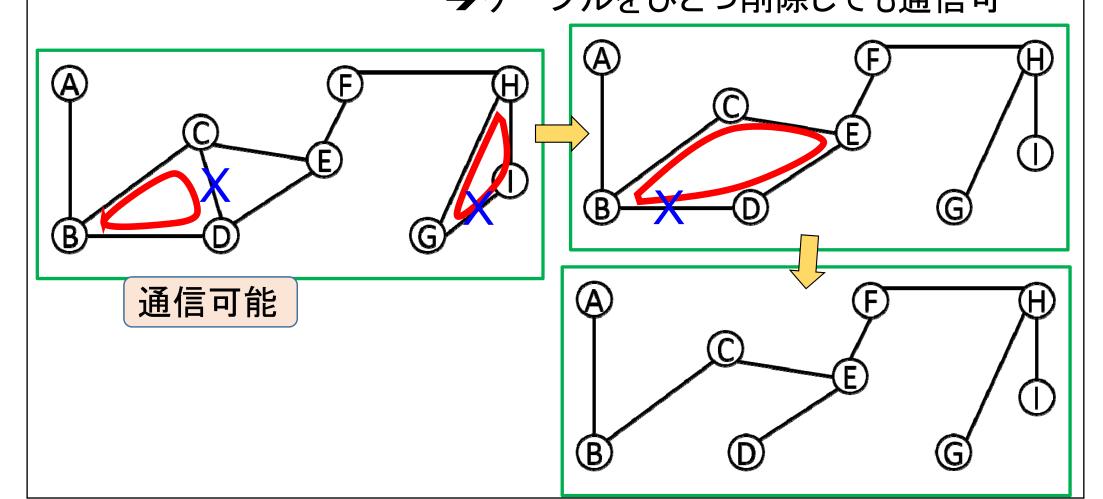






## 無駄を省いたネットワーク

- 通信できればOK
  - ・無駄なケーブルはできる限り省く
  - ケーブルで一周できる→周上の各地点に2系統の通信路→ケーブルをひとつ削除しても通信可



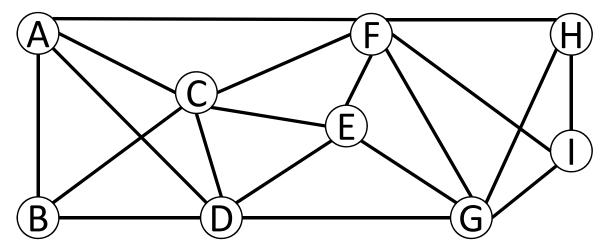
## グラフ

最小全域木問題を数学的に表現するために使う

- 定義:グラフ=「丸」を「線」で結んだ図
  - •頂点=「丸」, 枝=「線」

#### グラフの例

- ・ 友人関係の図
- 鉄道路線図, 道路網
- 組織図, 家系図



※数学的には,

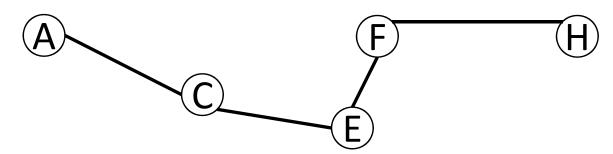
グラフG = (V, E)は全頂点の集合Vと全枝の集合Eの対として表現各枝 $(u, v) \in E$ は頂点の対として表現

上記のグラフの場合,

すべての頂点の集合 $V = \{A, B, C, ..., H, I\}$ すべての枝の集合 $E = \{(A, B), (B, C), (C, D), (B, D) ...\}$ 

#### 路と閉路

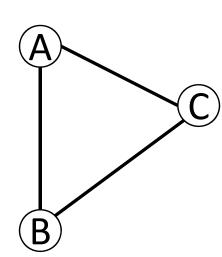
•路(みち)(path, パス)=複数の枝が1つにつながったもの



厳密な定義: 枝の列  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), ..., (u_k, v_k)$  ただし  $v_1 = u_2, v_2 = u_3, ..., v_{k-1} = u_k$ 

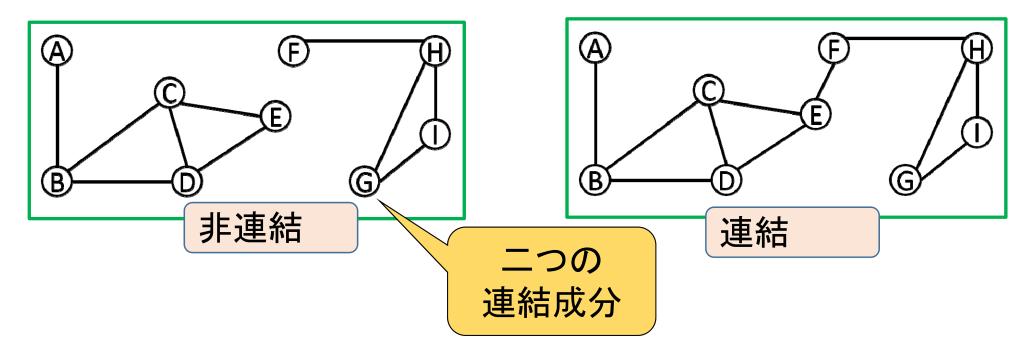
• 閉路(cycle, サイクル) = 複数の枝が1つの輪になったもの

厳密な定義: 枝の列  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), ..., (u_k, v_k)$  ただし  $v_1 = u_2, v_2 = u_3, ..., v_{k-1} = u_k$   $v_k = u_1$ 



## 連結性

定義:グラフが連結=すべての頂点対の間に路が存在



定義:連結成分=極大な連結部分グラフ

(つまり、枝で繋がっている部分グラフのこと)

- 非連結なグラフには、複数の連結成分が存在
- グラフ全体が一つの連結成分 ←→ グラフが連結

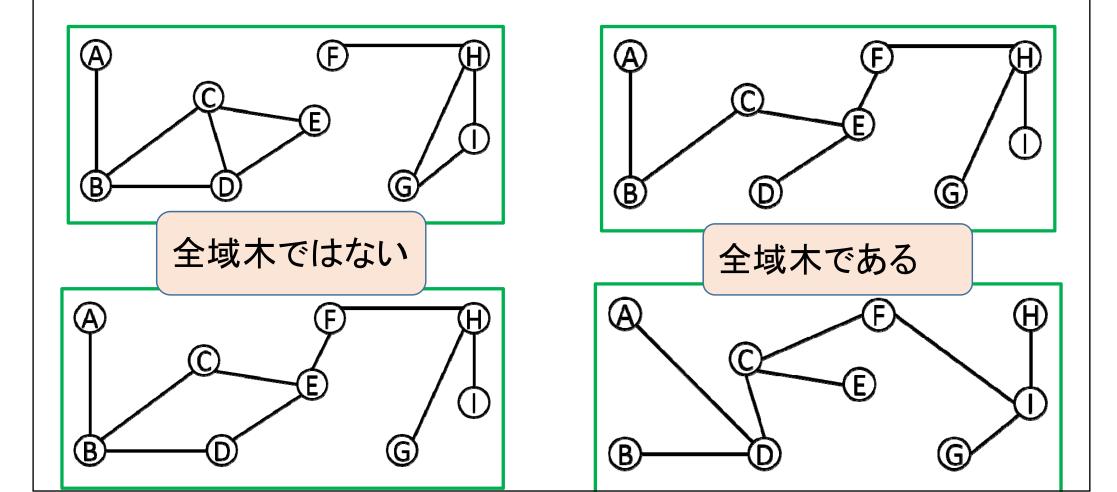
#### グラフの構造は図から明らか?

- グラフの連結性や、閉路の存在は図を見れば明らかか?
- グラフは、図として与えられているとは限らない
  - どの頂点が枝で結ばれているか、と言う情報のみ 与えられることが多い
  - •例: twitter graph --- 頂点は user,枝は follower←→followee 各 user とその follower, followeeの情報のみ与えられる
- グラフが図として与えられていても、明らかとはいえない
  - グラフが巨大なこともある
    - →局所的な情報を集めて調べる必要

### グラフの全域木

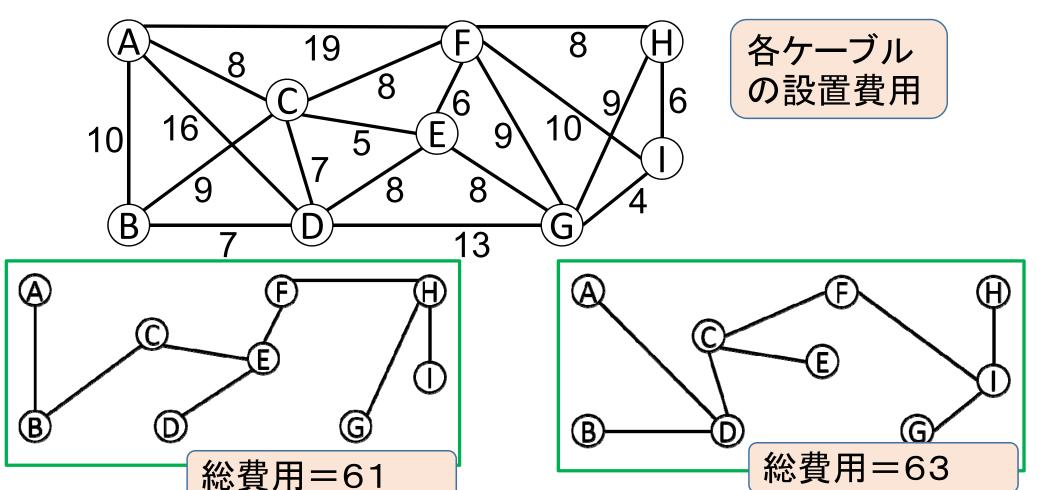
定義:全域木=次の条件を満たす枝の部分集合 T

- (i) グラフ (V, T) は連結 (ii) 枝集合 T は閉路を含まない
- (つまり, 全域木 -- 無駄のないネットワークのこと)



### 最小全域木問題

- •大学内の通信用ネットワークを構築したい
  - ケーブル(u,v)の設置には費用c(u,v) > 0が必要
  - 通信可能なネットワークを、出来るだけ最小費用でつくりたい
    - →<br/>
      費用の和が最小の全域木を求める問題(<br/>
      最小全域木問題)



## これから考えること

- •どうやって、全域木を求めるか?
  - •「全域木」のことをよく理解する
    - →全域木の求め方がわかる
- どうやって、最小全域木を求めるか?
  - 「最小全域木」のことをよく理解する
    - →最小全域木の求め方がわかる

## これから考えること

- どうやって、全域木を求めるか?
  - 「全域木」のことをよく理解する
    - →全域木の求め方がわかる
- •どうやって、最小全域木を求めるか?
  - 「最小全域木」のことをよく理解する
    - →最小全域木の求め方がわかる

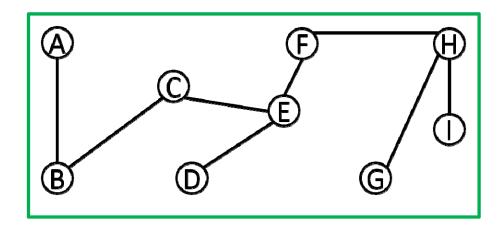
### 全域木の特徴付け

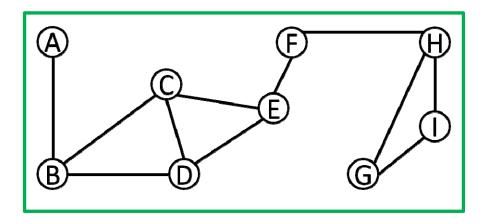
定義:全域木=次の条件を満たす枝の集合 T

(i) グラフ(V, T) は連結 (ii) 枝集合 T は閉路を含まない

定理: グラフGの任意の枝集合  $T \subseteq E$  に対し、以下の条件は等価

- (1) T は全域木
- (2) (V, T) の任意の2頂点の間に路はただ1つ存在
- (3) (V, T) は連結, ただし T から任意の枝を削除すると非連結
- (4) |T| = |V| 1, かつグラフ (V,T) は連結
- (5) |T| = |V| 1, かつ T は閉路を含まない

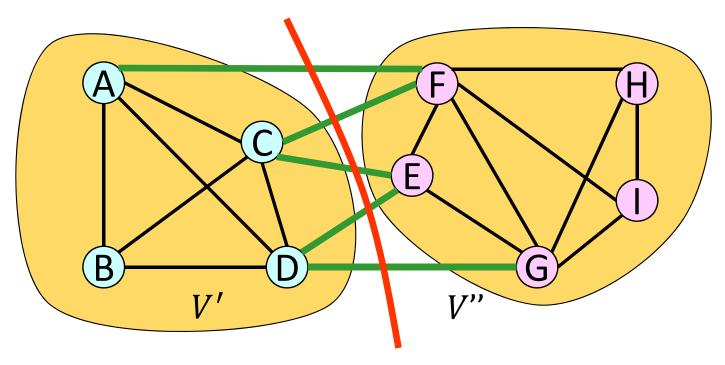




## グラフのカットセット

- V', V'': グラフの頂点集合の分割(全ての頂点を2つに分けたもの)
- 定義:V',V"に関するカットセットE(V',V")

**←→**V′,V″を結ぶ枝全ての集合



### カットセットと連結性

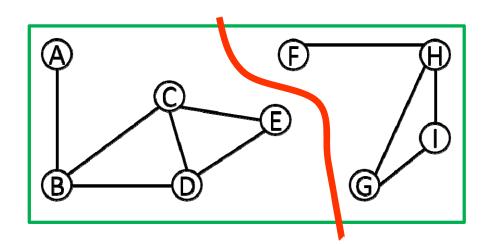
定理: Gの枝集合  $T \subseteq E$  に対し, 次が成立:

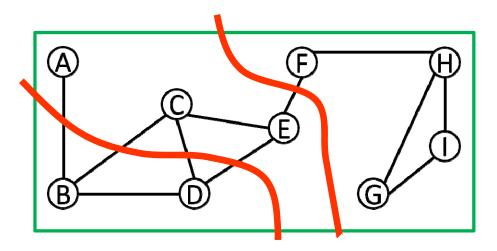
(V, T) は連結

←→ 任意のカットセットE(V',V'') に対し、 $T \cap E(V',V'') \neq \emptyset$ 

#### 証明

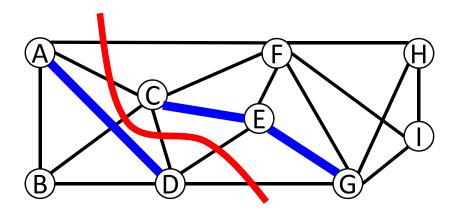
- $[\rightarrow] u \in V', v \in V''$  を選ぶ $\rightarrow$  u と v は路で繋がれている
  - → 路のいずれかの枝はE(V',V") の枝のはず
- [←] 対偶を証明:ある頂点 u と v は路で繋がっていない
  - $\rightarrow$  u を含む連結成分 V' に対し、 $T \cap E(V', V \setminus V') = \emptyset$

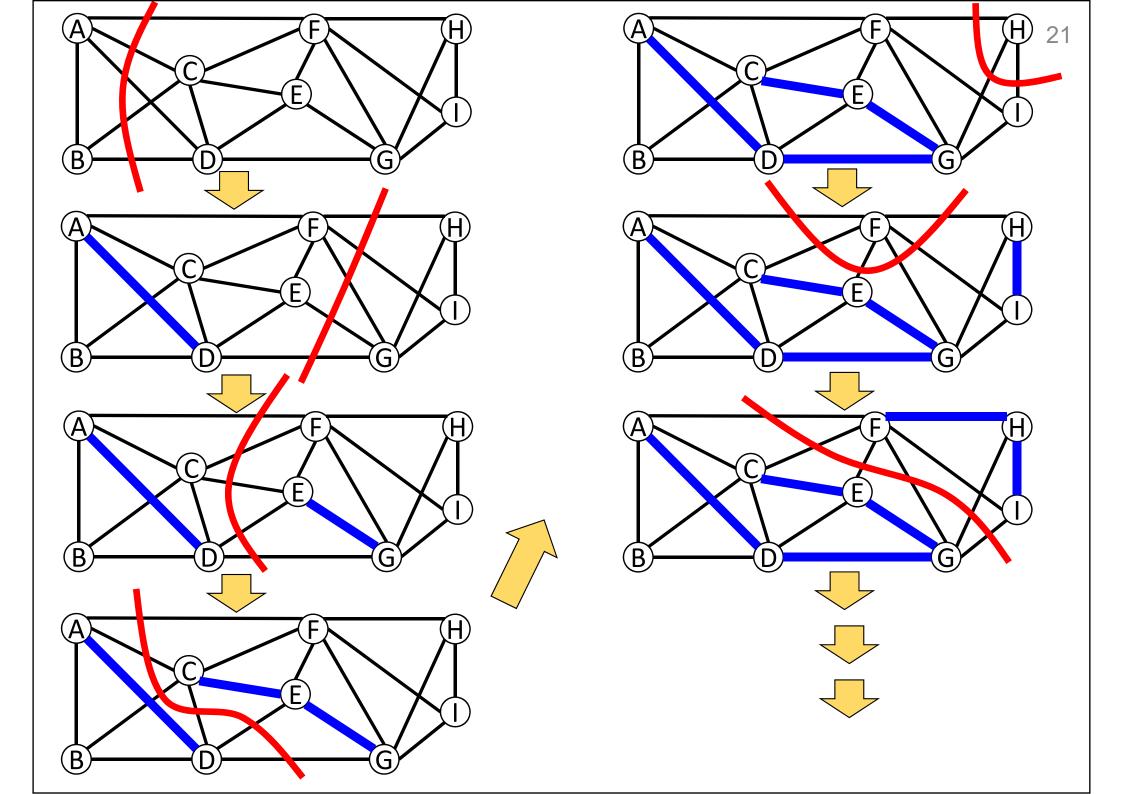




### 全域木の求め方

- ・枝を1つずつ選び、Tに追加していく
- Tが連結でない → あるカットセットの枝を T は含まない
  - → そのカットセットの枝を追加する
- Tが連結になったら終了(←→ 枝数が |V|-1 のとき)
- ・途中で閉路ができないことに注意(なぜ?)



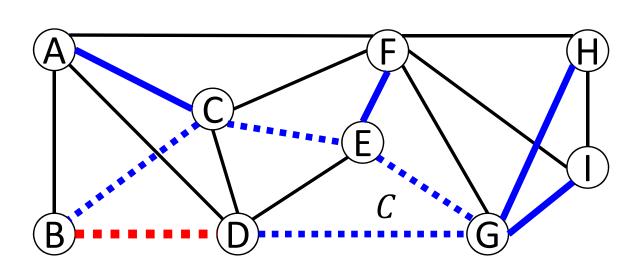


## これから考えること

- •どうやって、全域木を求めるか?
  - 「全域木」のことをよく理解する
    - →全域木の求め方がわかる
- どうやって、最小全域木を求めるか?
  - 「最小全域木」のことをよく理解する
    - →最小全域木の求め方がわかる

### 全域木に関する基本閉路

- 全域木 T へ, Tに含まれない枝 (u,v) をひとつ追加
- → uとvの間には路が(ただ1つ)存在するので, 閉路が(ただ1つ)生じる (Tと(u,v)に関する基本閉路)



T+(u,v)の閉路は なぜ ただ1つか?

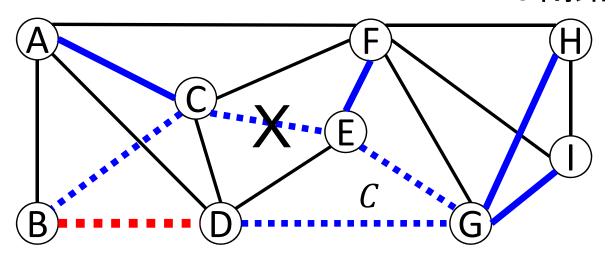
青い全域木(太い枝)と枝(B,D)に関する基本閉路 =点線の枝集合

## 基本閉路と全域木

性質:全域木T,Tに含まれない枝(u,v), Tと(u,v)に関する基本閉路の枝(s,t)に対し, T'=T+(u,v)-(s,t)は全域木になる

証明: 全域木の特徴付けに関する定理 ((1)←→(5)) を使う. 枝数について, |T'| = |T| = |V| - 1 が成立.

T+(u,v) の閉路は基本閉路のみ → (s,t) を削除するとなくなる → T' は閉路を含まない



青い全域木(太い枝)に枝(B,D)を追加, (C,E)を削除 →新しい全域木

## カットセットと最小全域木(1)

任意のカットセットの枝のうち、少なくとも1つは全域木に含まれる → カットセットの中で費用最小の枝を追加すると良い? Yes!

#### 定理:

*E(V',V'')*:任意のカットセット

(u,v): カットセットE(V',V'') の中で費用最小の枝

→(u,v)を含む最小全域木T\*が存在

#### 証明:

T: 任意の最小全域木

(1)Tが (u,v)を含む場合: T\*=Tとすればよい

(2)Tが (u,v)を含まない場合:

Tと(u,v) に関する基本閉路 C は,

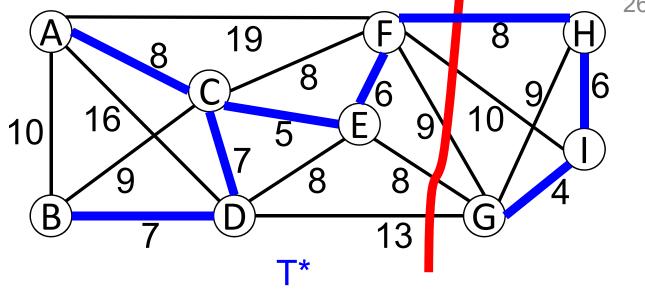
カットセットの枝(s,t)で(s,t)≠(u,v)なるものを必ず含む(なぜ?)

→基本閉路の性質より, T\* = T + (u,v) - (s,t) もまた全域木

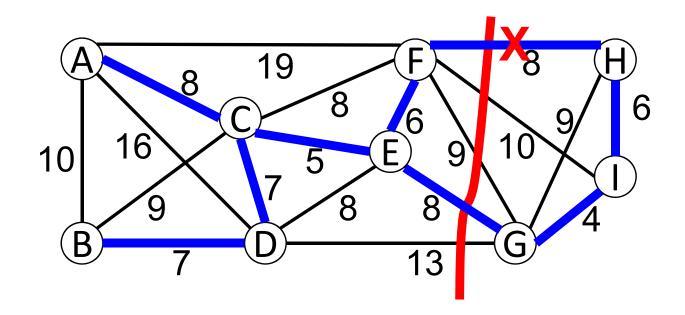
(u,v) の選び方より, c(u,v)≤c(s,t) → T\*の費用≤Tの費用

∴T\*もまた最小全域木

V'={G,H,I}, V"=V – V' に関するカットセットの中で, (F,H)は費用最小 → (F,H)を含む最小全域木T\* が存在



同じカットセットの中で, (E,G)もまた費用最小 → T\*+(E,G)-(F,H) もま た最小全域木



## カットセットと最小全域木(2)

#### 定理:

T': ある最小全域木に含まれる枝集合

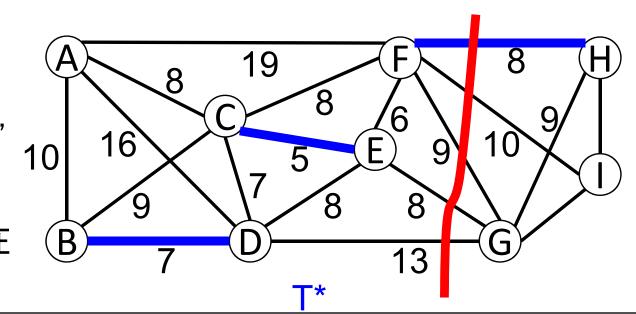
 $E(V',V''):E(V',V'')\cap T'=\emptyset$ を満たす、任意のカットセット

(u,v): カットセットE(V',V'') の中で費用最小の枝

→T' および(u,v)を含む最小全域木T\*が存在

証明の概略:前の定理と同様

- (B,D), (C,E) を含む最小 全域木が存在する
- V'={G,H,I}, V"=V V'に 関するカットセットの中で, (F,H)は費用最小
- → (B,D), (C,E), (F,H) を 含む最小全域木T\* が存在



## レポート用演習問題

問題1:右のグラフの全域木のうち、

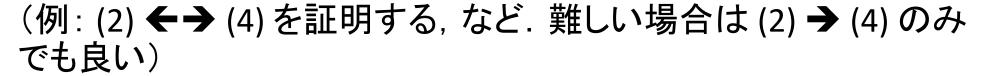
枝 (a,b), (a,c) の両方を含むものを

すべて書け(ヒント:5個以上)

問題2:全域木の特徴付けに関する定理

の6条件のうち、いずれかを選んで

必要十分性を証明せよ.



全部証明したい場合は,

(1) → (2) → ... → (6) → (1) の順番がおすすめ

演習問題は友人と共同で解いても可ただし、レポート自体は各自で自分の言葉で書くこと!

