第１２回：シャープレイ値（続き）

復習：シャープレイ値の公式 1

プレイヤー i の提携 S に対する貢献度：

$$v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

シャープレイ値 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$ は以下の式により求まる．

$$\phi_i = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi} \left(v(P^{\pi,i} \cup \{i\}) - v(P^{\pi,i}) \right)$$

- Π: N の順列全体の集合
- $P^{\pi,i}$: 順列 π における i の先行者の集合

表を使い全ての順列を書き出し，貢献度を計算する方法

復習：シャープレイ値の公式２

シャープレイ値 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$ は以下の式で与えられる．

$$\phi_i = \frac{1}{n!} \sum_{S \subseteq N, i \notin S} s!(n-s-1)! \left(v(S \cup \{i\}) - v(S)\right) \quad (1)$$

ただし，

- s：提携 S の人数
- n：プレイヤーの集合 N の人数

シャープレイ値の公理系による特徴付け

- ナッシュ交渉解と同様にシャープレイ値も公理系により特徴づけられる．
- 以下の４つの公理を満たす唯一の（一点）解である．
  - 全体合理性
  - ナルプレイヤーに関する性質
  - 対称なプレイヤーに関する性質
  - 解の線形性 [1]

(N, v) の解を $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ とする．４つの公理はこの x^* に関する性質について述べている．

[1] 実際は，加法性と呼ばれる弱い性質で証明されている．

全体合理性とナルプレイヤー

全体合理性:

$$\sum_{i \in N} x_i^* = v(N)$$

$i \in N$ がナルプレイヤー：$v(S \cup \{i\}) = v(S)\ \forall S \subseteq N \setminus \{i\}$

ナルプレイヤーに関する性質：i がナルプレイヤー $\Rightarrow$ $x_i^* = 0$.

対称なプレイヤー

- $i \in N$ と $j \in N$ が対称：$i \notin S, j \notin S$ となる任意の提携 S に対し，$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ が成り立つ．

<u>対称なプレイヤーに関する性質</u>：二人のプレイヤー i と j が対称 $\Rightarrow x_i^* = x_j^*$

解の線形性

- 以下では (N, v) と (N, u) をゲームとし，(N, w) の特性関数を以下のように定義する．

$$w(S) = \alpha v(S) + \beta u(S), S \subseteq N$$

ただし，α, β は実数とする．

<u>線形性</u>：(N, v), (N, u), (N, w) の解をそれぞれ x^*,y^*,z^* とする．このとき，

$$z_i^* = \alpha x_i^* + \beta y_i^* \ \forall i \in N$$

公理系からの導出方法（1）

$T \subseteq N$ を固定し，以下の特性関数を考える．

$$w_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{if } T \subseteq S \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

- 任意の T に属しないプレイヤー i はナルプレイヤー．
  - $T \subseteq S \Rightarrow w_T(S) = 1 = w_T(S \cup \{i\})$.
  - $T \nsubseteq S \Rightarrow w_T(S) = 0 = w_T(S \cup \{i\})$.

(N, w_T) のシャープレイ ϕ とする．このとき

- ナルプレイヤーに関する性質 より $\phi_i(w_T) = 0 \ \forall i \notin T$.

公理系からの導出方法（2）

- 任意の T に属している 2 人のプレイヤー i, j は対称.
  - $i, j \notin S$ を満たす提携 S は必ず $T \nsubseteq S$ となる．また，$T \nsubseteq S \cup \{i\}, T \nsubseteq S \cup \{j\}$ でもある.
  - $\Rightarrow w_T(S \cup \{i\}) = 0 = w_T(S \cup \{j\})$.

- 対称なプレイヤーに関する性質 より $\phi_i(w_T) = \phi_j(w_T)$ $\forall i, j \in T$
- 全体合理性 より $\sum_{i \in N} \phi_i(w_T) = w_T(N) = 1$.

$$\phi_i(w_T) = \begin{cases} 1/t & i \in T \\ 0 & i \notin T \end{cases}$$

(t: T の人数)

特性関数形ゲーム全体の空間（１）

(N, v) は $2^n - 1$ 次元ベクトルとして見なせる．（$n = 3$ の場合は $2^3 - 1 = 7$ 次元！）

$$N = \{A, B, C\}$$

$$v(\{A, B, C\}) = 5$$

$$v(\{A, B\}) = 2, v(\{A, C\}) = 5, v(\{B, C\}) = 0$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

このゲームを $(0, 0, 0, 2, 5, 0, 5)$ と表すことができる．
(A,B,C,AB,AC,BC,ABC の順番)

特性関数形ゲーム全体の空間（２）

- $(w_T)_{T \subseteq N, T \neq \emptyset}$ はゲーム全体の空間の基底になっている．即ち，任意のゲーム (N, v) は $(w_T)_{T \subseteq N, T \neq \emptyset}$ の線形結合として表すことができる．
- (N, v) を特性関数形ゲームとしたとき，各 w_T に対応する係数 α_T が存在し，

$$v(S) = \sum_{T \subseteq N, T \neq \emptyset} \alpha_T w_T(S) \ \forall S \subseteq N \tag{2}$$

  と表すことができる．
- $(w_T)_{T \subseteq N, T \neq \emptyset}$ が <u>線形独立</u> であることを示せば十分．

基底である証明：$N = \{A, B, C\}$ の場合

<u>線形独立</u>：$(x^1, \cdots, x^k)$ が線形独立であるとは以下の式

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_k x^k = \mathbf{0}$$

の解が $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ のみ．ただし，$\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す．

$$\begin{aligned}
w_{\{A\}} &:(1,0,0,1,1,0,1) \\
w_{\{B\}} &:(0,1,0,1,0,1,1) \\
w_{\{C\}} &:(0,0,1,0,1,1,1) \\
w_{\{A,B\}} &:(0,0,0,1,0,0,1) \\
w_{\{A,C\}} &:(0,0,0,0,1,0,1) \\
w_{\{B,C\}} &:(0,0,0,0,0,1,1) \\
w_{\{A,B,C\}} &:(0,0,0,0,0,0,1)
\end{aligned}$$

シャープレイ値の導出方法

任意の特性関数形ゲーム (N, v) に対し，以下を満たす α_T の族が唯一に決まる．

$$v = \sum_{T \subseteq N, T \neq \emptyset} \alpha_T w_T$$

線形性より，シャープレイ値が以下の式を満たす．

$$\phi(v) = \sum_{T \subseteq N, T \neq \emptyset} \alpha_T \phi(w_T)$$

よって，係数 α_T の値がわかれば計算できる．

係数 α_T を求める方法：$N = \{A, B, C\}$ の場合

式 (2)：

$$v(S) = \sum_{T \subseteq N, T \neq \emptyset} \alpha_T w_T(S), \ \forall S \subseteq N$$

<u>$S = \{A\}$ を代入</u>.

- （左辺）$= v(\{A\})$
- （右辺）$= \alpha_A$

したがって，$\alpha_A = v(\{A\})$．同様に，

$$\alpha_B = v(\{B\})$$
$$\alpha_C = v(\{C\})$$

係数 α_T を求める方法：$N = \{A, B, C\}$ の場合

$S = \{A, B\}$ を代入：

$$\begin{aligned} v(\{A, B\}) &= \alpha_A + \alpha_B + \alpha_{AB} \\ &= v(\{A\}) + v(\{B\}) + \alpha_{AB} \end{aligned}$$

したがって，$\alpha_{AB} = v(\{A, B\}) - v(\{A\}) - v(\{B\})$．同様に

$$\begin{aligned} \alpha_{AC} &= v(\{A, C\}) - v(\{A\}) - v(\{C\}) \\ \alpha_{BC} &= v(\{B, C\}) - v(\{B\}) - v(\{C\}) \end{aligned}$$

$S = \{A, B, C\}$ を代入しα_{ABC} を求める：

$$\begin{aligned} \alpha_{ABC} = v(\{A, B, C\}) &- v(\{A, B\}) - v(\{A, C\}) - v(\{B, C\}) \\ &+ v(\{A\}) + v(\{B\}) + v(\{C\}) \end{aligned}$$

事例６－２

$$N = \{A, B, C\}$$

$$v(\{A, B, C\}) = 5$$

$$v(\{A, B\}) = 2, v(\{A, C\}) = 5, v(\{B, C\}) = 0$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

$\alpha_A = \alpha_B = \alpha_C = 0$, $\alpha_{AB} = 2$, $\alpha_{AC} = 5$, $\alpha_{BC} = 0$, $\alpha_{ABC} = -2$. よって，

$$v = 2w_{\{A,B\}} + 5w_{\{A,C\}} - 2w_{\{A,B,C\}}$$

事例６－２

事例６－２のベクトル表示：$(0, 0, 0, 2, 5, 0, 5)$

$$
\begin{aligned}
0 * w_{\{A\}} &: (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1) \\
0 * w_{\{B\}} &: (0, 1, 0, 1, 0, 1, 1) \\
0 * w_{\{C\}} &: (0, 0, 1, 0, 1, 1, 1) \\
2 * w_{\{A,B\}} &: (0, 0, 0, 2, 0, 0, 2) \\
5 * w_{\{A,C\}} &: (0, 0, 0, 0, 5, 0, 5) \\
w_{\{B,C\}} &: (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \\
-2 * w_{\{A,B,C\}} &: (0, 0, 0, 0, 0, 0, -2)
\end{aligned}
$$

シャープレイ値の応用例

- 滑走路建設の費用分担
- 投票ゲーム – 投票者の影響力を測る（次回）
- 破産問題 – Random arrival rule
- Aumann-Shapley 価格 – 電話料金

宿題第６回（最終回）

課題：

1. ７月１８日出題分
2. 練習問題４の１を公理を使って求めよ.
3. 練習問題４の５

提出期限：７月２５日（月）１３：２０
必ずホームワーク表紙を使い（OCW-i からダウンロード），
ホチキスで左上の１箇所でとめること.