第８回：仁の応用例

復習

- S の x に対する不満：$e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$
- 仁の考え方：不満を均等化
- 配分 x の不満ベクトル $\theta(x)$：x に対する不満を大きいものから順番に並べたベクトル
- 配分 x が配分 y より受容的：下記の条件を満たす k が存在することである．
  - $\theta_l(x) = \theta_l(y)$, $l = 1, 2, \cdots, k-1$
  - $\theta_k(x) < \theta_k(y)$.
- x より受容的な配分 y が 存在しない $\rightarrow$ x が仁

応用例２：遺産分割問題（破産問題）

E：遺産額
c_i：債権者 i の債権額
タルムード（2000 年前のユダヤ教の法典）による分配方法：

E	$c_1 = 100$	$c_2 = 200$	$c_3 = 300$
100	$100/3$	$100/3$	$100/3$
200	50	75	75
300	50	100	150

上の分配方法を説明する法則？

応用例２：遺産分割問題（破産問題）

E	$c_1 = 100$	$c_2 = 200$	$c_3 = 300$
100	$100/3$	$100/3$	$100/3$
200	50	75	75
300	50	100	150

$E = 100$：均等分配
$E = 200$：???
$E = 300$：比例分配
実は，ある特性関数形ゲームの仁と一致．(Aumann and Maschler (1982))

特性関数の定義（三人の場合）

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$v(N) = E$$

$$v(\{1, 2\}) = \max\{E - c_3, 0\}$$

$$v(\{1, 3\}) = \max\{E - c_2, 0\}$$

$$v(\{2, 3\}) = \max\{E - c_1, 0\}$$

$$v(\{1\}) = \max\{E - (c_2 + c_3), 0\}$$

$$v(\{2\}) = \max\{E - (c_1 + c_3), 0\}$$

$$v(\{3\}) = \max\{E - (c_1 + c_2), 0\}$$

$E = 100,\ c_1 = 100,\ c_2 = 200,\ c_3 = 300$ の場合

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(\{1, 2, 3\}) = 100$$
$$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 0$$
$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

仁：$(100/3, 100/3, 100/3)$

$E = 200,\ c_1 = 100,\ c_2 = 200,\ c_3 = 300$ の場合

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(\{1, 2, 3\}) = 200$$
$$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = 0, v(\{2, 3\}) = 100$$
$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

仁：$(50, 75, 75)$

布の分配

長さ 100 の布があり，これを二人のプレイヤー 1 と 2 で分ける問題

プレイヤー 1 の要求：「長さ 50 欲しい」
プレイヤー 2 の要求：「長さ 100 欲しい」

この問題を contested garment (CG) 問題と呼ぶ．

CG 解

1：「長さ 50 欲しい」　= 「残り 50 は 2 に譲る」
2：「長さ 100 欲しい」　= 「0 は譲る」
要求が「重複」している部分は折半（黒板で説明する）

よって，それぞれの取り分は
1：$0 + \frac{(100-50)}{2} = 25$
2：$50 + \frac{(100-50)}{2} = 75$

CG 解の公式

布の長さを E, プレイヤー 1 とプレイヤー 2 のそれぞれの要求する長さを c_1, c_2 とする．ただし，$c_1 + c_2 \geq E$ とする．このとき，

- $X = \max\{E - c_2, 0\}$
- $Y = \max\{E - c_1, 0\}$

<u>CG 解</u>：

- プレイヤー 1：$X + \frac{E-(X+Y)}{2}$
- プレイヤー 2：$Y + \frac{E-(X+Y)}{2}$

CG 整合解

$x = (x_1, x_2, x_3)$ が CG 整合解 であるとは，任意の $i, j \in \{1, 2, 3\}$ に対し，(x_i, x_j) が長さ $(x_i + x_j)$ とそれぞれの要求が c_i, c_j である CG 問題の CG 解である．

三人の場合は以下の事実を確かめればよい．

- (x_1, x_2) が長さ $(x_1 + x_2)$，要求が c_1, c_2 の CG 解
- (x_1, x_3) が長さ $(x_1 + x_3)$，要求が c_1, c_3 の CG 解
- (x_2, x_3) が長さ $(x_2 + x_3)$，要求が c_2, c_3 の CG 解

Aumann and Maschler (1982) の結果：三人バージョン

定理 1.

(E, c_1, c_2, c_3) を破産問題とし，$x = (x_1, x_2, x_3)$ をタルムードによる分配方法とする．

1. x はスライド 5 で定義された特性関数形ゲームの仁と一致する．
2. x は CG 整合解である．

$E = 200$ のとき，$(50, 75, 75)$ が CG 整合解

- $(x_1, x_2) = (50, 75)$ について – 長さ $50 + 75 = 125$, $c_1 = 100$, $c_2 = 200$ のときの CG 解は
  - プレイヤー 1 : $0 + \frac{125-25}{2} = 50 = x_1$
  - プレイヤー 2 : $25 + \frac{125-25}{2} = 75 = x_2$.
- $(x_1, x_3) = (50, 75)$ について – 長さ $50 + 75 = 125$, $c_1 = 100$, $c_3 = 300$ のときの CG 解は
  - プレイヤー 1 : $0 + \frac{125-25}{2} = 50 = x_1$
  - プレイヤー 3 : $25 + \frac{125-25}{2} = 75 = x_3$.
- $(x_2, x_3) = (75, 75)$ について – 長さ $75 + 75 = 150$, $c_2 = 200$, $c_3 = 300$ のときの CG 解は
  - プレイヤー 2 : $0 + \frac{150-0}{2} = 75 = x_2$
  - プレイヤー 3 : $0 + \frac{150-0}{2} = 75 = x_3$.

他の応用例

- 割当ゲーム（非分割財市場の拡張モデル）の仁の計算方法（アルゴリズム）
- 空港の滑走路の費用分担方法　– 一つの機種をプレイヤーとして扱う
- 純粋交換経済

宿題第 6 回

課題：

1. 7 月 4 日に出題された問題
2. $E = 400$, $c_1 = 100$, $c_2 = 200$, $c_3 = 300$ をスライド 5 の特性関数形ゲーム表現を導出し，仁を計算し，CG 整合解であることを確かめよ．

提出期限：７月１１日（月）１３：２０
必ずホームワーク表紙を使い （OCW-i からダウンロード)，
ホチキスで左上の 1 箇所でとめること．