協力ゲーム理論練習問題 2

1. 次の特性関数形ゲームのコアを求め，非空である場合は図示せよ．

(a)

$$N = \{A, B, C\}$$

$$v(\{A, B, C\}) = 16$$

$$v(\{A, B\}) = 10, v(\{A, C\}) = 8, v(\{B, C\}) = 12$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

(b)

$$N = \{A, B, C\}$$

$$v(\{A, B, C\}) = 10$$

$$v(\{A, B\}) = 10, v(\{A, C\}) = 0, v(\{B, C\}) = 0$$

$$v(\{A\}) = 0, v(\{B\}) = 0, v(\{C\}) = 0$$

2. 講義資料の例 1' の特性関数形ゲームについて以下の問いに答えよ．

(a) 配分 $(1, 0, 0)$ は，いかなる配分に支配されないことを示せ．

(b) $(1, 0, 0)$ に支配されないが，別の配分に支配されるような配分を一つ挙げよ．

(c) 配分を表す正三角形の図に $(1, 0, 0)$ によって支配される配分全体を図示せよ．

3. （タクシー相乗り）同じ方向（一直線上）に住んでいる A,B,C が O 駅からタクシーを相乗りし，その三人の中で一番遠い C が料金を支払っておき，後日残りの A と B が C に清算することを約束したとする．O 駅から A 宅までの料金が１８００円，B 宅まで２４００円，C 宅まで３０００円とする．

(a) この状況を（費用削減分で定義した）特性関数形ゲームとして定式化し，コアを求め図示せよ．

(b) C 宅までの料金のみが６００円に値上がりしたとする．すなわち，A 宅までの料金が１８００円，B 宅まで２４００円，C 宅まで３６００円とする．このとき，特性関数形ゲームは (a) の特性関数形ゲームと比べてどう変化し，コアがどうなるかを答えよ．

(c) A,B,C 宅までの料金が一律に６００円値上がりしたとする．すなわち，A 宅までの料金が２４００円，B 宅まで３０００円，C 宅まで３６００円とする．このとき，特性関数形ゲームはどう変化し，コアがどうなるかを答えよ．

4. （手袋ゲーム）左手袋を持っているプレイヤーをプレイヤー１とプレイヤー３として，右手袋を持っているプレイヤーをプレイヤー２とプレイヤー４とし，左手袋と右手袋の一組につき１万円で売れるとする．

   (a) この状況を特性関数形ゲームとして定式化せよ．

   (b) このゲームのコアは以下のように与えられることを示せ.（ヒント：右辺の集合を C' とおき，$C \subseteq C'$ および $C' \subseteq C$ を示すこと.）

$$C = \{(\alpha, 1-\alpha, \alpha, 1-\alpha) \in \mathcal{R}^4 | 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

   (c) 新たに左手袋を所持している５人目のプレイヤー５を考える．プレイヤー５が加わることによって，特性関数形ゲームがどう変化するかを答えよ．

   (d) (c) で定義したゲームのコアを求めよ．

   (e) 一般に左手袋を持っているプレイヤーが m 人，右手袋を持っているプレイヤーが n 人いるとし，左手袋を所持しているプレイヤーの集合を L, 右手袋を所持しているプレイヤーの集合を R とする．この状況に対応する特性関数形ゲームを定義し $m < n$, $m = n$, $m > n$ のそれぞれのケースにおけるコアを求めよ．

5. 事例６-３の状況を定式化した，以下の ”特性関数形ゲーム”を考える．この特性関数は，各提携が形成されたときの総費用にマイナスの符号を付け加えたものを提携値として与えている．

$$N = \{A, B, C\}$$

$$v(\{A, B, C\}) = -170$$

$$v(\{A, B\}) = -119, v(\{A, C\}) = -135, v(\{B, C\}) = -112$$

$$v(\{A\}) = -70, v(\{B\}) = -55, v(\{C\}) = -65$$

   (a) 上で定義されたゲームが優加法性を満たすかどうかを確かめよ．

   (b) 上で定義されたゲームが単調性を満たすかどうかを確かめよ．

   (c) この問題のゲームが講義ないしはテキストで定義された特性関数形ゲームと戦略上同等であることを示せ．

6. （投票ゲーム）この問題では，投票ゲームについて考える．投票ゲームに関する定義は以下で与える．

- 特性関数形ゲーム (N, v) が $S \neq N$ を満たす任意の提携 S に対し $v(S) = 0$ または $v(S) = 1$ が成り立ち，$v(N) = 1$ を満たすとき (N, v) を <u>単純ゲーム</u> と呼ぶ．
- 単純ゲーム (N, v) がさらに次の二つの条件を満たすとき (N, v) を <u>投票ゲーム</u> と呼ぶ．

  (i) 任意の $S \subseteq T$ を満たす二つの提携 S と T に対し $v(S) \leq v(T)$.（単調性）

  (ii) $v(S) = 1$ ならば $v(N \setminus S) = 0$.
- 投票ゲームにおいて $v(S) = 1$ となる提携 S を <u>勝利提携</u> と呼ぶ．
- ある $i \in N$ が全ての勝利提携に含まれているとき，i を <u>拒否権を持つプレイヤー</u> と呼ぶ．拒否権を持つプレイヤーの集合を V とおく．
- $\{i\}$ が勝利提携であるとき，i を <u>独裁者</u> と呼ぶ．

投票ゲームについて以下の問いに答えよ．

(a) 提携 S が勝利提携であるとする．$S \subseteq T$ を満たす提携 T も勝利提携になることを示せ．

(b) 投票ゲームが優加法性を満たすことを示せ．

(c) 拒否権を持つプレイヤーの集合 V を $V = \bigcap\{S \subseteq N | v(S) = 1\}$ と表すことができることを簡単に説明せよ．（証明を与える必要はない．）

(d) 次の命題を考える：「任意の投票ゲーム (N, v) において $v(V) = 1$ が成り立つ．」この命題が真であるならば証明し，偽であれば反例となる投票ゲームを挙げよ．

(e) $V = \emptyset$ のとき，コアが空集合であることを示せ．

(f) $V \neq \emptyset$ のとき，以下の集合を考える．

$$C = \{x \in A | x_i = 0,\ \forall i \in N \setminus V\}.$$

このとき，上の集合 C 内の全ての配分が提携合理性を満たすこと，そしてコアに属している配分が上の式の右辺の集合に属していることを示せ．ただし，A は配分全体の集合とする．

7. 買い手 2 人，売り手 2 人の非分割財市場を考える．買い手と売り手それぞれの評価額は以下で与えられているとする．

売り手	評価額	買い手	評価額
1	4	$1'$	18
2	8	$2'$	12

このとき，

(a) この市場における需要と供給をそれぞれ図示し，均衡価格となる価格全体を求め，均衡における数量を求めよ．

(b) この市場を特性関数形ゲームに定式化し，コアを求め，コア配分に対応する価格の全体を求めよ．

ここで新たに 3 人目の売り手，売り手 3 が上の市場に加わり，売り手 3 の評価額を 10 とする．

(c) 売り手 3 が加わった後，市場の需要と供給がどのように変化し，均衡価格と均衡数量はどのように変わるかを答えよ．

(d) 売り手 3 が加わった後，この市場の特性関数形ゲームとコアがどのように変化するかを答えよ．