第１１回：投票力指数

復習：シャープレイ値

シャープレイ値 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$ は以下の式で与えられる．

$$\phi_i = \frac{1}{n!} \sum_{S \subseteq N, i \notin S} s!(n-s-1)! \left(v(S \cup \{i\}) - v(S)\right)$$

ただし，

- s：提携 S の人数
- n：プレイヤーの集合 N の人数

今日の内容

- 投票ゲームへの応用 → シャープレイ・シュービック指数，バンザフ指数
- 貢献度 → 影響力

意思決定を投票に委ねられる.

- 国連安全保障理事会
- 参議院・衆議院
- 株主総会
- 教授会
- アメリカのプロスポーツ：MVP 等

復習：投票ゲーム（1）

投票ゲームの定義：

- $v(S) = 0$ または $v(S) = 1$, $v(N) = 1$
- $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$
- $v(S) = 1 \Rightarrow v(N \setminus S) = 0$

記号/用語：

- $v(S) = 1$ となる提携 S を勝利提携と呼ぶ.
- $\mathcal{W} = \{S \subseteq N | v(S) = 1\}$：勝利提携の集合
- $(N, \mathcal{W})$ を投票ゲームと呼ぶこともある.

復習：投票ゲーム（2）

- i が拒否権を持つ $\Leftrightarrow$

$$S \in \mathcal{W} \Rightarrow i \in S$$

ないしは，対偶をとれば

$$i \notin S \Rightarrow S \notin \mathcal{W}$$

- i が独裁者 $\Leftrightarrow \{i\} \in \mathcal{W}$. 投票ゲームにおいては以下の条件と同値：

$$i \in S \Rightarrow S \in \mathcal{W}$$

投票ゲームの一例：重みつき多数決ゲーム

$$[q; w_1, w_2, w_3, \cdots w_n]$$

- w_i：プレイヤー i が持つ票数
- q：議案を可決するのに必要な票数

政治への応用の場合，

- 一つの政党を一人のプレイヤーとして扱う
- 票数 $\rightarrow$ 議席数
- 提携を組む $\rightarrow$ 連立

重みつき多数決ゲーム → 特性関数形ゲーム（投票ゲーム）

$[q; w_1, w_2, \cdots, w_n]$ を重みつき多数決ゲームとする．このとき，

$$S \in \mathcal{W} \ \text{ if } \sum_{i \in S} w_i \geq q$$
$$S \notin \mathcal{W} \ \text{ if } \sum_{i \in S} w_i < q$$

投票ゲーム $\Leftrightarrow \sum_{i \in N} \frac{w_i}{2} < q < \sum_{i \in N} w_i$ と仮定．

例

- 多数決ゲーム：（事例６－１）

$$[2; 1, 1, 1], [51; 50, 50, 1]$$

  - $\mathcal{W} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}\}$.
- プレイヤー１が拒否権を持つ３人ゲーム（例１’）

$$[3; 2, 1, 1], [51; 50, 49, 1]$$

  - $\mathcal{W} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, B, C\}\}$.

シャープレイ・シュービック指数

(N, v) におけるシャープレイ値 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$：

$$\phi_i = \sum_{S \subseteq N, i \notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

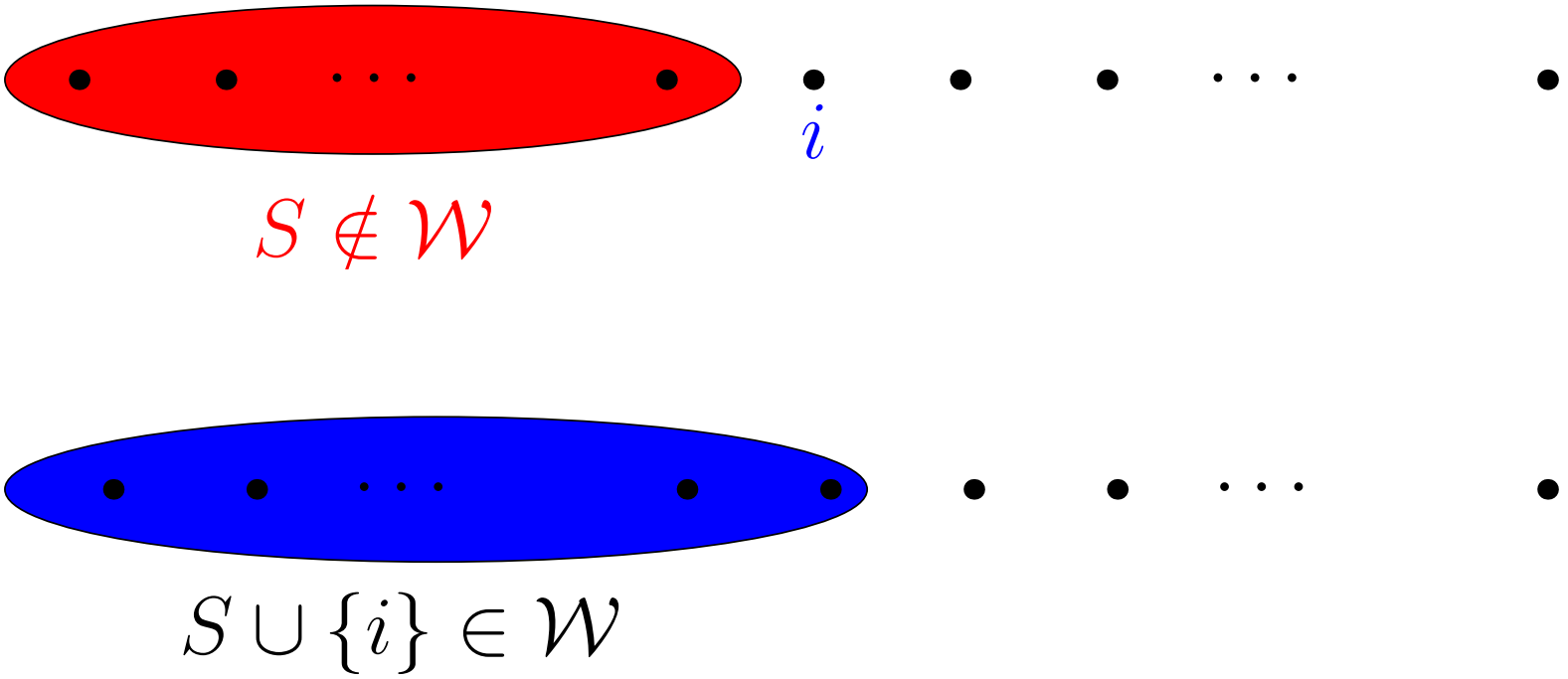
- 貢献度 > 0 は $S \cup \{i\} \in \mathcal{W}$ かつ $S \notin \mathcal{W}$ のときのみ.
- 投票ゲームにおけるシャープレイ値をシャープレイ・シュービック (SS) 投票力指数 (Shapley-Shubik power index) と呼ぶ.

SS_i：i のシャープレイ・シュービック投票力指数

$$SS_i = \sum_{S \notin \mathcal{W}, S \cup \{i\} \in \mathcal{W}} \frac{s!(n-s-1!)}{n!}$$

ピヴォット：イメージ

議案を通したいプレイヤーから順番に投票する．何番目かのプレイヤーが賛成すれば可決できる．このプレイヤーがこの順番に対するピヴォット．SS 指数はプレイヤーがピヴォットになる割合を表している．



ピヴォット：数学的定義

ある順列に対しプレイヤー i の前に提携 S のプレイヤーたちが先に投票したとする．

$$S \notin \mathcal{W}, S \cup \{i\} \in \mathcal{W}$$

上記の条件が成り立つならば，その順列において，プレイヤー i はピヴォット (pivot) であるという．

バンザフ投票力指数

シャープレイ＝シュービック指数においては，順列を基に考えていた．今度は提携を基に考える．

→ バンザフ (Bz) 投票力指数 (Banzhaf power index)

スウィング：数学的定義

プレイヤー i が提携 S に対してスウィング (swing) であることは以下のいずれかが満たされるときである．

1. $S \in \mathcal{W}$ かつ $S \setminus \{i\} \notin \mathcal{W}$
2. $S \notin \mathcal{W}$ かつ $S \cup \{i\} \in \mathcal{W}$

すなわち，

1. i が提携 S から抜けることにより $S \setminus \{i\}$ が勝利提携でなくなる．
2. i が勝利提携でない提携 S に加わることにより $S \cup \{i\}$ が勝利提携になる．

スウィング：イメージ

- 議案に対し，各プレイヤーは賛成 (Y) か反対 (N)
- 各プレイヤーの Y と N の組合せは全部で 2^n 個である．
- ある組合せに対し，プレイヤー i が
  - Y から N へ変更 $\rightarrow$ 「可決」から「否決」に変更
  - N から Y へ変更 $\rightarrow$ 「否決」から「可決」に変更

  のいずれかが起こった場合，i はスウィングになる．

スウィングの例

$$[3; 2, 1, 1]$$

プレイヤー 1,2,3 がそれぞれ議案に対して Y, Y, N と投票すると仮定．この場合，議案は可決される．

- プレイヤー 1 が $Y \to N$ と変更 $\Rightarrow$ NYN となり否決
- プレイヤー 2 が $Y \to N$ と変更 $\Rightarrow$ YNN となり否決
- プレイヤー 3 が $N \to Y$ と変更 $\Rightarrow$ YYY となり可決

よって，プレイヤー 1 とプレイヤー 2 はスウィングである．
ピヴォットと違い，一つの組合せに対して複数のスウィングがいる場合もある．

スウィング

Y を選択しているプレイヤーの集合を提携 S（この場合は $S = \{1, 2\}$) とすれば

- $S \in \mathcal{W}, S \setminus \{1\} \notin \mathcal{W}$
- $S \in \mathcal{W}, S \setminus \{2\} \notin \mathcal{W}$
- $S \in \mathcal{W}, S \cup \{3\} \in \mathcal{W}$

定義より，S に対してプレイヤー１とプレイヤー２はスウィングである．

バンザフ指数の定義

定義 1.

バンザフ指数 *(Banzhaf index)* :

$$\beta_i = \frac{(\text{スウィングになる回数})}{2^n}$$

2^n : 提携全体の数
各提携の組合せ（Y と N 組合せ）が同じ確率で起こるとき,
β_i は i がスウィングになる回数の期待値.

計算例 1 ：SS 指数

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$[2; 1, 1, 1]$$

	ピヴォット		
順列	1	2	3
$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$		○	
$1 \leftarrow 3 \leftarrow 2$			○
$2 \leftarrow 1 \leftarrow 3$	○		
$2 \leftarrow 3 \leftarrow 1$			○
$3 \leftarrow 1 \leftarrow 2$	○		
$3 \leftarrow 2 \leftarrow 1$		○	

SS 指数：$(1/3, 1/3, 1/3)$

計算例 1 ：バンザフ指数

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$[2; 1, 1, 1]$$

投票			可否	スウィング		
1	2	3		1	2	3
Y	Y	Y	可			
Y	Y	N	可	×	×	
Y	N	Y	可	×		×
N	Y	Y	可		×	×
Y	N	N	否		×	×
N	Y	N	否	×		×
N	N	Y	否	×	×	
N	N	N	否			

バンザフ指数：$(4/8, 4/8, 4/8)$

計算例２：SS 指数

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$[3; 2, 1, 1]$$

	ピヴォット		
順列	1	2	3
$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$		○	
$1 \leftarrow 3 \leftarrow 2$			○
$2 \leftarrow 1 \leftarrow 3$	○		
$2 \leftarrow 3 \leftarrow 1$	○		
$3 \leftarrow 1 \leftarrow 2$	○		
$3 \leftarrow 2 \leftarrow 1$	○		

SS 指数：$(4/6, 1/6, 1/6)$

計算例２：バンザフ指数

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$[3; 2, 1, 1]$$

投票			可否	スウィング		
1	2	3		1	2	3
Y	Y	Y	可	×		
Y	Y	N	可	×	×	
Y	N	Y	可	×		×
N	Y	Y	否	×		
Y	N	N	否		×	×
N	Y	N	否	×		
N	N	Y	否	×		
N	N	N	否			

バンザフ指数：$(6/8, 2/8, 2/8)$

参入のパラドックス

- $[4; 3, 2, 2]$
  - SS 指数：$(1/3, 1/3, 1/3)$
  - Bz 指数：$(4/8, 4/8, 4/8)$
- $[5; 3, 2, 2, 1]$
  - SS 指数：$(10/24, 6/24, 6/24, 2/24)$
  - Bz 指数：$(5/8, 3/8, 3/8, 1/8)$

プレイヤー 4 の参入によりプレイヤー 1 の相対的重み $\downarrow$, SS 指数 $\uparrow$ と Bz 指数 $\uparrow$

分裂のパラドックス

- $[7; 5, 5, 3]$
  - SS 指数：$(1/3, 1/3, 1/3)$
  - Bz 指数：$(4/8, 4/8, 4/8)$
- $[7; 5, 5, 1, 1, 1]$
  - SS 指数：$(36/120, 36/120, 16/120, 16/120, 16/120)$
  - Bz 指数：$(8/16, 8/16, 4/16, 4/16, 4/16)$

政党３がそれぞれ無所属になった場合，そのとき

$$(\text{分裂後の三人の指数の合計}) > (\text{分裂前の政党の指数})$$

まとめ

	SS 指数	Bz 指数
数えるもの	ピヴォット	スウィング
重みのベース	順列	提携

投票力指数関連の他のトピック

- ３選択肢以上のモデル
- 政党の連立パターンを考慮した投票力指数
- 二院制
- より複雑な投票システムの分析（小選挙区と比例代表制（日本），代議員制度（アメリカ合衆国））

宿題第６回（最終回）

課題：

1. 練習問題４の４
2. 全ての投票ゲームにおいて，プレイヤーがスウィングになる提携の数は偶数であることを示し，以下の公式でバンザフ指数が与えられることを示せ．

$$\beta_i = \frac{(S \cup \{i\} \in \mathcal{W}, S \notin \mathcal{W} \text{ を満たす提携 } S \text{ の数})}{2^{n-1}}$$

3. スライド 22 とスライド 23 の投票力指数を実際に計算し確かめよ．
4. ７月２１日出題分

提出期限：７月２５日（月）１３：２０
必ずホームワーク表紙を使い（OCW-i からダウンロード），ホチキスで左上の１箇所でとめること．