協力ゲーム理論練習問題 4

1. 次の特性関数形ゲームのシャープレイ値を求めよ．

(a)

$$N = \{A, B, C\}$$

$$v(\{A, B, C\}) = 16$$

$$v(\{A, B\}) = 10, v(\{A, C\}) = 8, v(\{B, C\}) = 12$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

(b)

$$N = \{A, B, C\}$$

$$v(\{A, B, C\}) = 10$$

$$v(\{A, B\}) = 10, v(\{A, C\}) = 0, v(\{B, C\}) = 0$$

$$v(\{A\}) = 0, v(\{B\}) = 0, v(\{C\}) = 0$$

2. （タクシー相乗り３）同じ方向（一直線上）に住んでいる A,B,C が O 駅からタクシーを相乗りし，その三人の中で一番遠い C が料金を支払っておき，後日残りの A と B が C に清算することを約束したとする．O 駅から A 宅までの料金が１８００円，B 宅まで２４００円，C 宅まで３０００円とする．(a) この状況を特性関数形ゲームとして定式化したときのシャープレイ値を求め，(b) シャープレイ値に基づく A と B の C への支払額を求めよ．

3. （手袋ゲーム３）左手袋を持っているプレイヤーをプレイヤー１とプレイヤー３として，右手袋を持っているプレイヤーをプレイヤー２とプレイヤー４とし，左手袋と右手袋の一組につき１万円で売れるとする．このゲームのシャープレイ値が $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ であることを (a) シャープレイ値の公式および (b) 表を用いた計算方法で確かめよ．

4. （投票ゲーム）この問題では投票ゲームのシャープレイ値について考える．復習のため，拒否権を持つプレイヤーと独裁者の定義を以下に挙げる．

- ある $i \in N$ が全ての勝利提携に含まれているとき，$i$ を <u>拒否権を持つプレイヤー</u> と呼ぶ．拒否権を持つプレイヤーの集合を $V$ とおく．
- $\{i\}$ が勝利提携であるとき，$i$ を <u>独裁者</u> と呼ぶ．

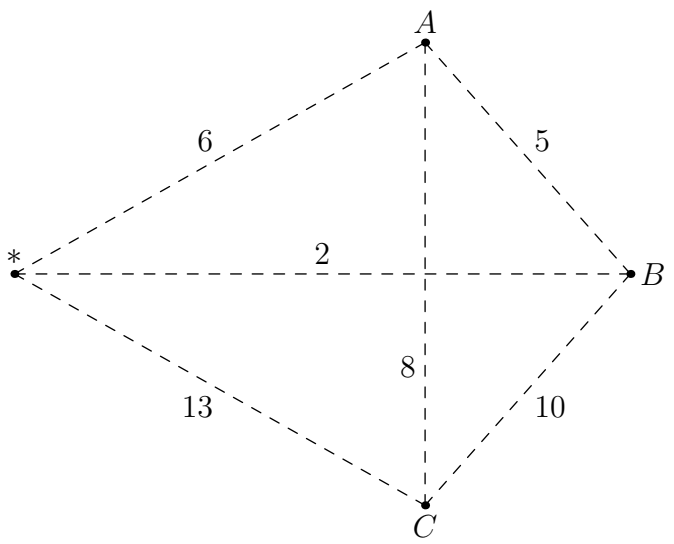
(a) 「シャープレイ値はつねに拒否権を持たないプレイヤーには 0 を与える.」この命題が真であれば証明し，偽であれば反例を挙げよ．

(b) 投票ゲームにおいて独裁者は二人以上存在しないことを背理法を使って証明せよ.

(c) 独裁者は拒否権を持つプレイヤーであることを示せ.

(d) 「独裁者が存在する投票ゲームのシャープレイ値は，独裁者に 1 を与え，他のプレイヤーには 0 を与える.」この命題が真であれば証明し，偽であれば反例を挙げよ.

5. 自治体 A，B，C に水を供給する問題を考え，水道管の建設にかかる費用が以下のグラフで与えられているとする.




(a) この状況に対応する（費用軽減分で定義した）特性関数形ゲーム表現をし，(b) シャープレイ値を求め，(c) シャープレイ値に基づくそれぞれの自治体の <u>支払額</u> を求めよ.