協力ゲーム理論練習問題 1

1. 以下の交渉問題におけるナッシュ交渉解を (i) 定義式を使って計算する方法と (ii) 公理のみを使った方法と**二通り**の方法で求め，答えが一致していることを確かめよ．

   (a) 実現可能集合：$(0,0)$, $(18,0)$, $(0,9)$ を頂点にする三角形の辺上および内部，$d = (4,2)$

   (b) 実現可能集合：$(1,1)$ を中心とする半径 1 の円，$d = (1,1)$.

   (c) 実現可能集合：$(0,0)$, $(4,6)$, $(8,2)$, を頂点にする三角形の辺上および内部，$d = (1,1)$

   (d) 実現可能集合：$(0,0)$, $(0,6)$, $(2,6)$, $(4,2)$, $(4,0)$ を頂点にする五角形の辺上および内部，$d = (0,0)$

   (e) 実現可能集合：$(0,0)$, $(18,0)$, $(0,9)$ を頂点にする三角形の辺上および内部，$d = (2,2)$

2. ある企業の経営者と労働者 $\bar{L}$ 人を代表する労働組合の間の賃金交渉問題を考える．企業が L 人を雇用したときの生産量は $\sqrt{L}$ で与えられているとする．賃金を w, 雇用されている人数を L としたときの企業の利得関数 $u_1(w,L)$，および労働組合の利得関数 $u_2(w,L)$ を以下で定義する．

$$u_1(w,L) = p\sqrt{L} - wL, u_2(w,L) = wL + w_0(\bar{L} - L)$$

   ただし，p は財の価格，w_0 は外部で得られる賃金を表し，$w_0 < \frac{p\sqrt{L}}{L}$ を満たす $L \leq \bar{L}$ が存在することを仮定する．$d = (0, w_0\bar{L})$ を基準点とし，実現可能集合を $0 \leq L \leq \bar{L}, 0 < w$ を満たす w, L によって実現される企業および労働組合の利得全体の集合とする．

   (a) パレート最適性を満たす (w,L) を求めるために以下の最大化問題を考える．

$$\max u_1(w,L) + u_2(w,L)$$

   この問題の L に関する最大解を L^* としたとき，L^* は w に依存せず，

$$L^* = \frac{p^2}{4w_0^2}$$

   で与えられることを示せ．

(b) L^* とナッシュ交渉解における賃金 w^* の間に以下の関係式が成立することを示せ.

$$w^* = \frac{1}{2}\left(w_0 + \frac{p\sqrt{L^*}}{L^*}\right)$$

また，上記式に (a) で与えられた L^* の式を代入し，w^* を求めよ.