

イントロダクションとナッシュ交渉問題

河崎 亮

工学院 経営工学系

6月13日（月）

本日の講義の「課題」

1. 協力ゲーム理論と非協力ゲーム理論の違いを説明できる.
2. ナッシュ交渉問題を定義できる.
3. 与えられた問題のナッシュ交渉解を定義式を用いて導出できる.

- 意思決定者（プレイヤー）の間に相互依存関係がある状況（ゲーム的状况）を数理的に解析する学問
- 二つに分けられる
 - 非協力ゲーム理論 (4Q)：プレイヤー間のコミュニケーションがない，戦略形ゲーム，展開形ゲーム
 - 協力ゲーム理論：プレイヤー間のコミュニケーションを許す，提携を組む可能性あり，交渉問題，特性関数形ゲーム

ゲーム理論の歴史

- J. von Neumann (フォン・ノイマン), O. Morgenstern (モルゲンシュテルン) 著 *Theory of Games and Economic Behavior*
 - 2人ゲーム = ゼロ和ゲーム：非協力ゲーム（展開形ゲーム，戦略形ゲーム）
 - 3人以上のゲーム：特性関数形ゲーム

青字：「非協力ゲーム理論」の内容

赤字：本講義で取り扱う内容

ゲーム理論の歴史

- J. von Neumann (フォン・ノイマン), O. Morgenstern (モルゲンシュテルン) 著 *Theory of Games and Economic Behavior*
 - 2人ゲーム = ゼロ和ゲーム：非協力ゲーム（展開形ゲーム，戦略形ゲーム）
 - 3人以上のゲーム：特性関数形ゲーム
- J. Nash (ナッシュ)
 - 2人ゲーム非ゼロ和：非協力ゲーム（戦略形ゲーム，展開形ゲーム）
 - 3人以上のゲーム：非協力ゲーム（戦略形ゲーム，展開形ゲーム）
 - 2人ゲーム非ゼロ和協力ゲーム：交渉問題 → ナッシュ交渉解

青字：「非協力ゲーム理論」の内容

赤字：本講義で取り扱う内容

関連する分野

- 経済学（市場ゲーム，交渉問題）
- オペレーションズ・リサーチ，最適化
- 政治学（投票ゲーム）
- 数学（数理的に分析するツール）

今後のスケジュール

1. 2人協力ゲーム：交渉問題 – ナッシュ交渉解
2. 多人数協力ゲーム：特性関数形ゲーム – コア，仁，シャープレイ値
3. 関連モデル：マッチング問題，ネットワーク

「交渉」に関連するイメージ：

- 二人の間の話し合い
- 双方にとってよい結果を導き出す.

問題を分析するにおいて重要な情報：

- 二人が協力した場合，実現しうる結果の全体
- 二人の間の交渉が決裂したときの結果

ナッシュ交渉問題の要素

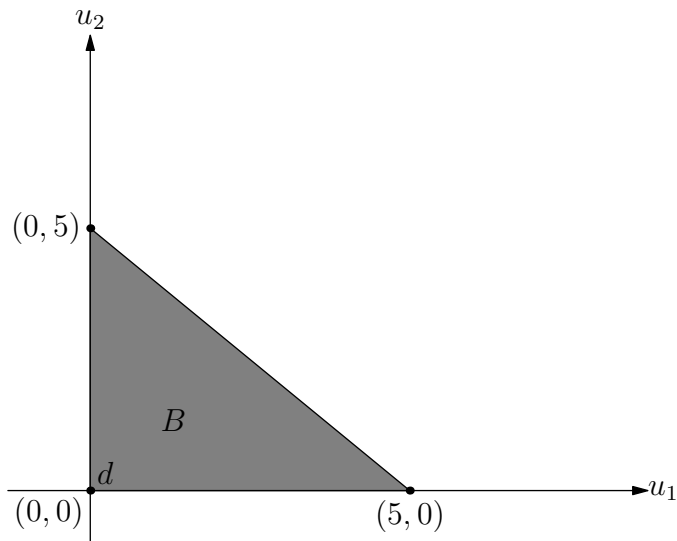
- 実現可能集合 : プレイヤーが協力して実現できる利得の組の全体
- 交渉の基準点 : 交渉が決裂した場合のそれぞれのプレイヤーの利得
- 記号 :
 - $B \subset \mathcal{R}^2$: 実現可能集合 ($\mathcal{R}^2$: 2次元ユークリッド空間)
 - $d = (d_1, d_2)$: 交渉の基準点
- 交渉問題 : (B, d) の組で定義される.

例 1

- プレイヤー：企業 1，企業 2（ただし，同じ市場では競争をしていない）。
- 企業 1 は投入財 A のみを所持し，企業 2 投入財 B のみを所持している。
- 両企業が生産するためには財 A と財 B 両方必要。すなわち，二企業間で投入財の取引がなければ，生産ができない。
- 企業 1 と企業 2 が協力した場合の総利潤を 5 とする。

例 1 の図

先の状況の実現可能集合.



ナッシュ交渉解の定義式

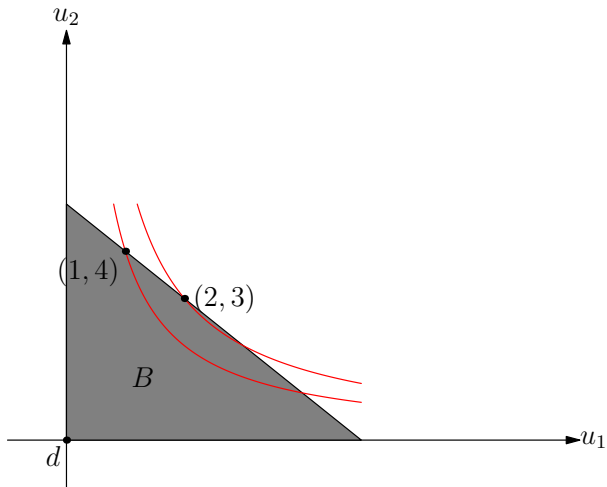
交渉の妥結点をどのように決めるか.

ナッシュ: 以下の最大化問題を解く.

$$\max_{(u_1, u_2) \in B, u_1 \geq d_1, u_2 \geq d_2} (u_1 - d_1)(u_2 - d_2)$$

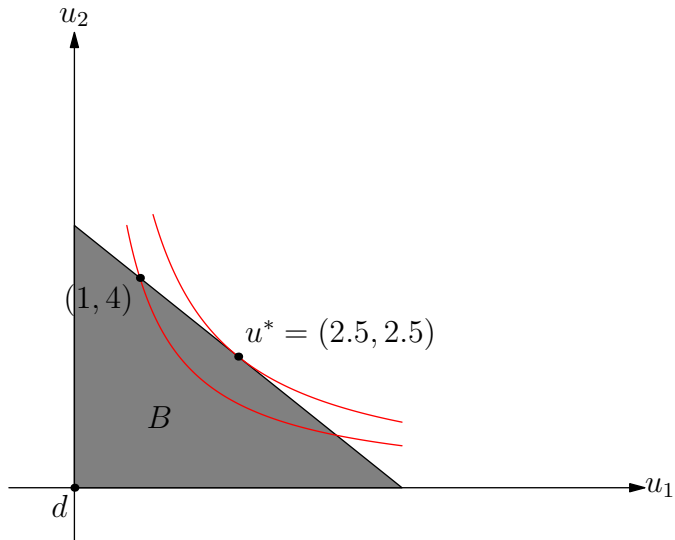
読み方: $u_1 \geq d_1$ かつ $u_2 \geq d_2$ を満たす $(u_1, u_2) \in B$ の中の要素で $(u_1 - d_1)(u_2 - d_2)$ を最大にする.

上の max を実現する (u_1^*, u_2^*) とする. この (u_1^*, u_2^*) が交渉問題 (B, d) における **ナッシュ交渉解**.



赤線 : $(1, 4)$ と $(2, 3)$ をそれぞれ通る $u_1 u_2$ の等高線.

例 1 のナッシュ交渉解の図



公式による説明

例 1 においては、以下の最大化問題を考える

$$\max_{(u_1, u_2): u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 + u_2 \leq 5} u_1 u_2$$

この問題の解は $u_1 + u_2 = 5$ を満たす (なぜ?). この式を使って u_2 を消去すれば、以下の問題を考えれば十分.

$$\max_{u_1: 0 \leq u_1 \leq 5} u_1(5 - u_1)$$

平方完成を使い、 $u_1(5 - u_1) = -(u_1 - 5/2)^2 + 25/4$ に注意すれば、最大化問題の解は $u_1^* = u_2^* = 5/2$.

宿題第 1 回

課題:

1. 練習問題 1 の 1(a),(b),(c)

提出期限 : 6 月 20 日 (月) 13:20 (次々回の授業開始時)

必ずホームワーク表紙を使い (OCW-i からダウンロード), ホ
チキスで左上の 1 箇所でとめること. A 4 用紙を使用する
こと.