

数理工学 期末試験想定問題集

注意事項

1. 持ち込みは不可で、問題数は大問 4 題程度を予定
2. 点数配分は各大問につき 25 点
3. ラプラス変換表などの情報 (最終ページを参照) は提示する

問 A.

- (1) 2 次形式 $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ を $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ とある行列 A を使って $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ の形で表せ.
- (2) ある変換 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T = T \mathbf{x}$ を用いて (1) の 2 次形式を標準形 $\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 y_3^2$ で表せ.
- (3) 次の命題の真偽を理由をつけて答えよ.
 - (a) 行列 D が正定値であるとき、逆行列 D^{-1} も正定値である.
 - (b) 対称行列 D の対角成分の和が正でかつ $\det(D) > 0$ であるとき、 D は正定値行列である.
 - (c) 正方行列 D が $D = -D^T$ を満たすとき、任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して $\mathbf{x}^T (-D^2) \mathbf{x} \geq 0$ である.

問 B.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (1) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底となることを示せ.
- (2) ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ をグラム-シュミットの直交化の手順に従い直交化せよ.
- (3) 行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ を QR 分解せよ.

問 C.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (1) ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ をグラム-シュミットの直交化の手順に従い直交化せよ.
- (2) 行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ を QR 分解せよ.
- (3) ベクトル $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ で張られる空間を W とするとき、点 $(1, 4, 6)^T$ に最も近い W 上の点を求めよ.

問 D.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値と固有空間をそれぞれ求めよ.
- (2) 行列 A を対角化する直交行列 P と対角行列 D をそれぞれ求めよ.
- (3) $\mathbb{R}^3$ において、部分空間 $(\ker(A))^\perp$ と点 $(2, 2, 2)^T$ との最短距離を計算せよ.

問 E. 次の 1 階線形微分方程式の一般解を導出したい：

$$\frac{dx(t)}{dt} + \alpha(t)x(t) = \beta(t) \quad (\text{C-1})$$

(1) 式 (C-1) において $\beta(t) = 0$ としたときの線形微分方程式の一般解が $x(t) = C \exp \left[- \int \alpha(t) dt \right]$ で与えられることを示せ。ただし C は積分定数である。

(2) ラグランジュの定数変化法 (積分定数 C を $C(t)$ と置き換える) を用いて (C-1) の一般解を求めよ。

問 F. ラプラス変換を用いて次の微分方程式を解け。

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t) = u(t), \quad x(0) = -1, \quad x^{(1)}(0) = 0$$

ここで、 $u(t)$ は $t \geq 0$ で 1 を取りそれ以外は 0 を取る関数である。

問 G. 次の 2 階線形微分方程式を解け。

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = h(t), \quad x(0) = 0, \quad x^{(1)}(0) = 0$$

ただし、 $h(t)$ は $0 \leq t < \pi$ で 1 を取り、それ以外では 0 を取る関数である。

問 H.

(1) 区間 $[-\pi, \pi]$ において $f(t) = t^2$ をフーリエ級数展開せよ。

(2) 次の等式を示せ。

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ラプラス変換 関数 $f(t)$ のラプラス変換 $L(f(t))$ は

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

で与えられる。以下は主要な関数に対するラプラス変換の結果を示したものである。

$f(t)$	$L(f(t))$	$f(t)$	$L(f(t))$
1	$\frac{1}{s}$	$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	$e^{bt} \cos at$	$\frac{s - b}{(s - b)^2 + a^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	$e^{bt} \sin at$	$\frac{a}{(s - b)^2 + a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$

ラプラス変換の性質

- ・移動則 $L(e^{at} f(t)) = F(s - a)$
- ・原関数の微分則 $L(-t f(t)) = \frac{d}{ds} F(s)$
- ・高階の微分則

$$L\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

ここに $f^{(n)}$ は f の n 階導関数を表す。

- ・合成定理

$$L(f * g(t)) = L(f(t))L(g(t)), \quad f * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

三角関数の公式

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2},$$

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \mp \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad \sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \pm \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

グラム・シュミットの直交化 V の 1 つの基底を $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ としたとき,

$$(1) \mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1 / \|\mathbf{a}_1\|$$

$$(2) \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}_2 / \|\mathbf{b}_2\|$$

$$(3) \mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k = \mathbf{b}_k / \|\mathbf{b}_k\| \quad (k = 3, 4, \dots, n)$$

の手順で V の正規直交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ を構成することができる。