

数理工学 演習課題 (24 章)

2016 年 11 月 18 日

24.A 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(t)$ を関数

$$f_N(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$$

で近似することを考える. このとき, 次の平均 2 乗誤差

$$\frac{1}{2\pi} \|f_N(t) - f(t)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_N(t) - f(t))^2 dt$$

が最小になるような $f_N(t)$ の係数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N$ が, $f(t)$ のフーリエ係数に一致することを証明せよ.

24.B

(1) 次の関数 $f(t)$ を区間 $[-\pi, \pi]$ においてフーリエ級数展開せよ.

$$f(t) = \begin{cases} -a, & -\pi \leq t < 0 \\ a, & 0 \leq t < \pi \end{cases} \quad (a > 0)$$

(2) 次の等式を示せ.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

24.C

(1) $f(t) = \cos \omega t$ を区間 $[-\pi, \pi]$ においてフーリエ級数展開せよ. ただし, ω は整数でない実数である.

(2) 次の等式を示せ.

$$\frac{\omega\pi}{\sin \omega\pi} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega^2 - n^2} (-1)^n$$