

数理工学第一 期末試験

2015 年 7 月 28 日

- 問題は全部で 5 題ある .
- 解答用紙は 5 枚ある . すべてに学籍番号と名前を書くこと .
- 問題順に , 各問一枚ずつ解答用紙を使用すること .
- 解答用紙の持ち帰りは認めない . 5 枚まとめて提出すること .
- 解答の途中経過も記すこと .
- 解答はわかりやすく丁寧にまとめること .

問題 1 (濃度)

集合 A は正の奇数からなる集合とし , 集合 B は -3 以上の整数からなる集合とする .
 A と B は対等であることを証明せよ .

問題 2 (ユークリッド空間)

(2-1) n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における部分集合 M が開集合であることの定義を ,
正の数 ϵ を用いて述べよ .

(2-2) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A は次の条件を満たすとする .

- (i) A は空集合ではない .
- (ii) A は $\mathbb{R}^n$ とは一致しない . すなわち A は $\mathbb{R}^n$ の真部分集合である .
- (iii) A は開集合である .

このとき , A と正の数 α で定まる集合

$$M = \{\alpha x : x \in A\}$$

が開集合であることを (2-1) で述べた定義に基づいて証明せよ (定義以外の開集合の性質は , 証明なしに用いてはならない) .

問題 3 (距離空間)

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数 d を

$$d(x, y) = |x^3 - y^3|$$

と定めると , d が距離関数となるかどうか判定せよ .

問題 4 (位相)

集合 $S = \{a, b, c\}$ に対して, 位相 $\mathcal{D} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, S\}$ を導入した位相空間 $(S, \mathcal{D})$ を考える. 以下の写像 f

$$f(x) = \begin{cases} b & (x = a) \\ a & (x = b) \\ c & (x = c) \end{cases}$$

が S における連続写像となることを証明せよ.

問題 5 (凸集合)

$\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合 A, B に対して, 集合 $A + B$ を

$$A + B = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}$$

と定める. A, B が凸集合ならば $A + B$ は凸集合となることを証明せよ.