能動RCフィルタ

フィルタの基礎

フィルタとは

入力信号の周波数に応じて出力信号の振幅や
位相を変える回路

フィルタの特性

入力電圧をラプラス変換：$v_{in}(t) \rightarrow V_{in}(s)$

出力電圧をラプラス変換：$v_{out}(t) \rightarrow V_{out}(s)$

$$\boxed{\text{伝達関数：} T(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}}$$

複素正弦波$V_{in}(s)\big|_{s=j\omega} = Ke^{j(\omega t+\phi)}$とすると，$V_{out}(s)\big|_{s=j\omega}$は

$$\boxed{V_{out}(s)\big|_{s=j\omega} = T(j\omega)Ke^{j(\omega t+\phi)}}$$

$$V_{out}(s)\big|_{s=j\omega}=T(j\omega)Ke^{j(\omega t+\phi)}$$

$$\left|V_{out}(s)\big|_{s=j\omega}\right|=\left|T(j\omega)\right|K$$

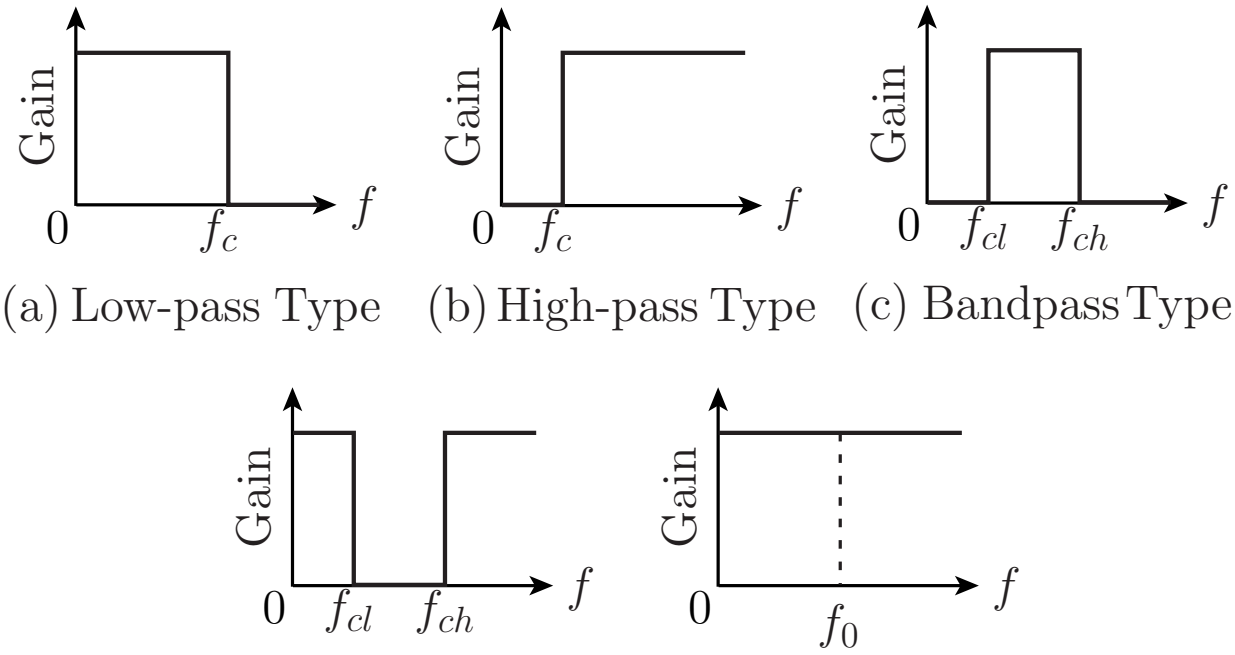
$$\arg V_{out}(s)\big|_{s=j\omega}=\arg T(j\omega)+\phi$$

$\boxed{A(\omega)=\left|T(j\omega)\right|\text{: 振幅特性}}$

$\boxed{\theta(\omega)=\arg T(j\omega)\text{: 位相特性}}$

代表的なフィルタ

- 低域通過フィルタ
- 帯域通過フィルタ
- 高域通過フィルタ
- 帯域除去フィルタ
- 全域通過フィルタ



(a) Low-pass Type (b) High-pass Type (c) Bandpass Type

(d) Bandstop Type (e) Allpass Type

f_c: 遮断周波数 | f_{cl}: 低域遮断周波数 | f_{ch}: 高域遮断周波数

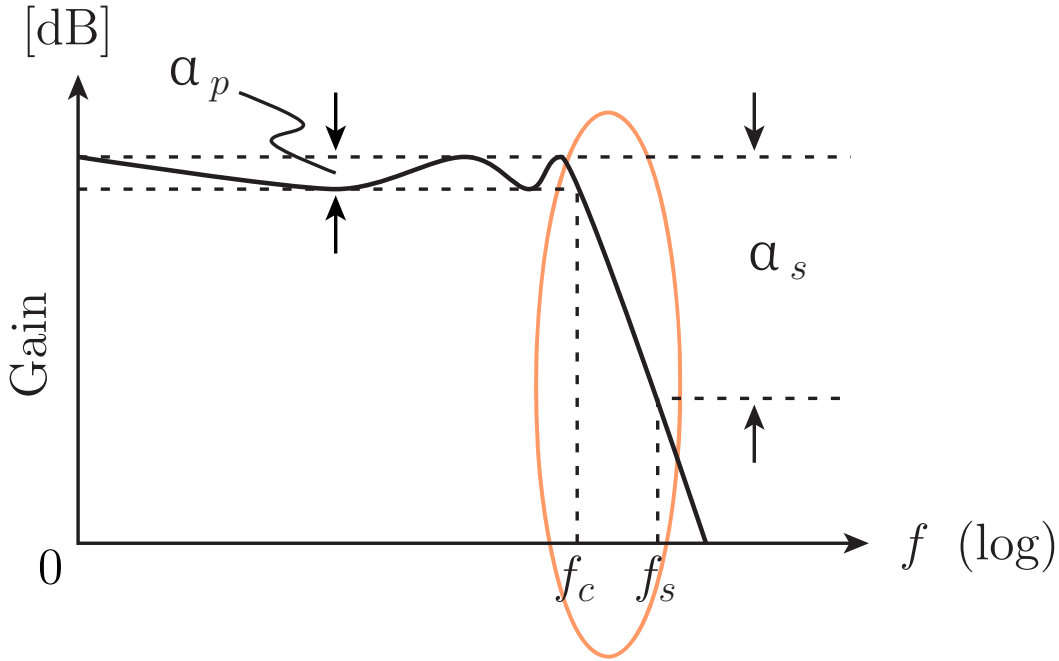
低域通過型における 0〜f_cあるいは

帯域通過型における f_{cl}〜f_{ch}: 通過帯域あるいは通 過域

低域通過型における f_c〜∞あるいは

帯域通過型における 0〜f_{cl}およびf_{ch}〜∞ : 遮断域

実際のフィルタ特性



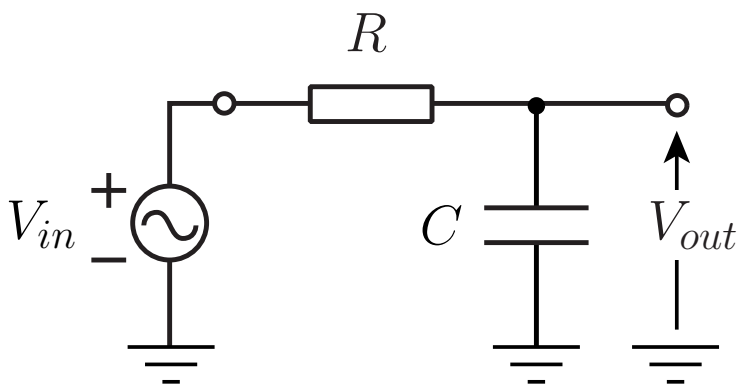
α_p ：通過域内許容偏差

α_s ：最小減衰量

f_s ：遮断域端周波数

$f_c \sim f_s$:過渡域

低域通過フィルタの例(1)



キルヒホッフの電流則から

$$\frac{V_{in}-V_{out}}{R}=sCV_{out}$$

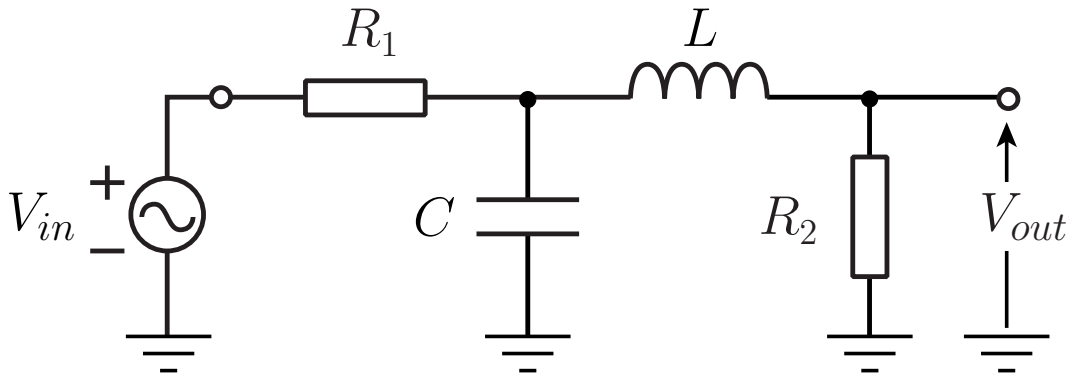
$$\boxed{T(s)=\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{1}{1+sCR}}$$

$T(s)=\dfrac{1}{1+sCR}$に$s=j\omega$を代入すると

$$A(\omega)=\left|T(s)\right|_{s=j\omega}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}$$

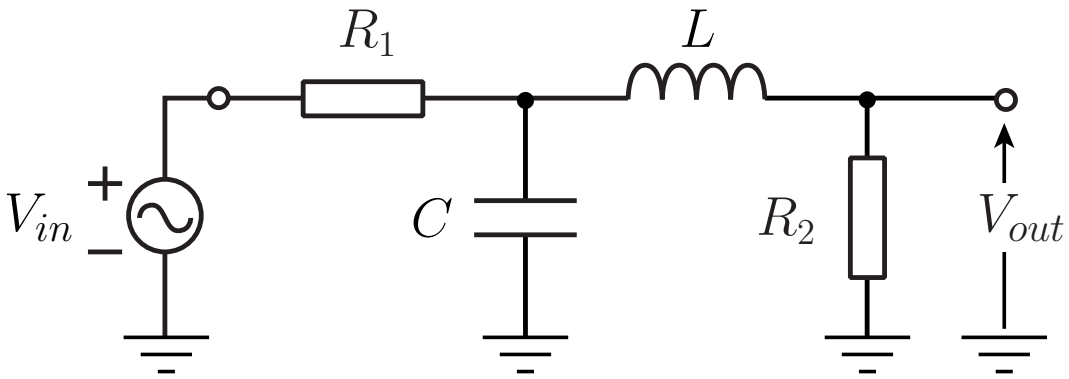
$\boxed{\text{この}A(\omega)\text{は}\omega\text{の単調減少関数なので低域通過特性}}$

低域通過フィルタの例(2)



容量Cに加わる電圧V_Cはミルマンの定理から

$$V_C=\frac{\frac{1}{R_1}V_{in}+\frac{1}{sL}V_{out}}{\frac{1}{R_1}+sC+\frac{1}{sL}}=\frac{sLV_{in}+R_1V_{out}}{s^2LCR_1+sL+R_1}$$



$$V_C = \frac{sLV_{in} + R_1 V_{out}}{s^2 LCR_1 + sL + R_1}$$

$$V_{out} = \frac{R_2 V_C}{sL + R_2}$$ より

$$\boxed{T(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{s^2 LCR_1 + sL + sCR_1 R_2 + R_1 + R_2}}$$

$$T(s)=\frac{R_2}{s^2LCR_1+sL+sCR_1R_2+R_1+R_2}$$ に $s=j\omega$ を代入すると

$$A\omega)=\left|T(s)\right|_{s=j\omega}=\frac{R_2}{\sqrt{\left\{R_1+R_2-\omega^2LCR_1\right\}^2+\omega^2\left(L+CR_1R_2\right)^2}}$$

このA(ω)はωの単調減少関数ではないが,
ω=0のとき入力信号を$R_2/(R_1+R_2)$倍した上で通過させ
ω→∞のとき出力信号が零に近づくので低域通過特性

状態変数型構成法

伝達関数に基づくフィルタの導出

$$T_L(s)=\frac{Ka_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}=\frac{V_{out}}{V_{in}}$$

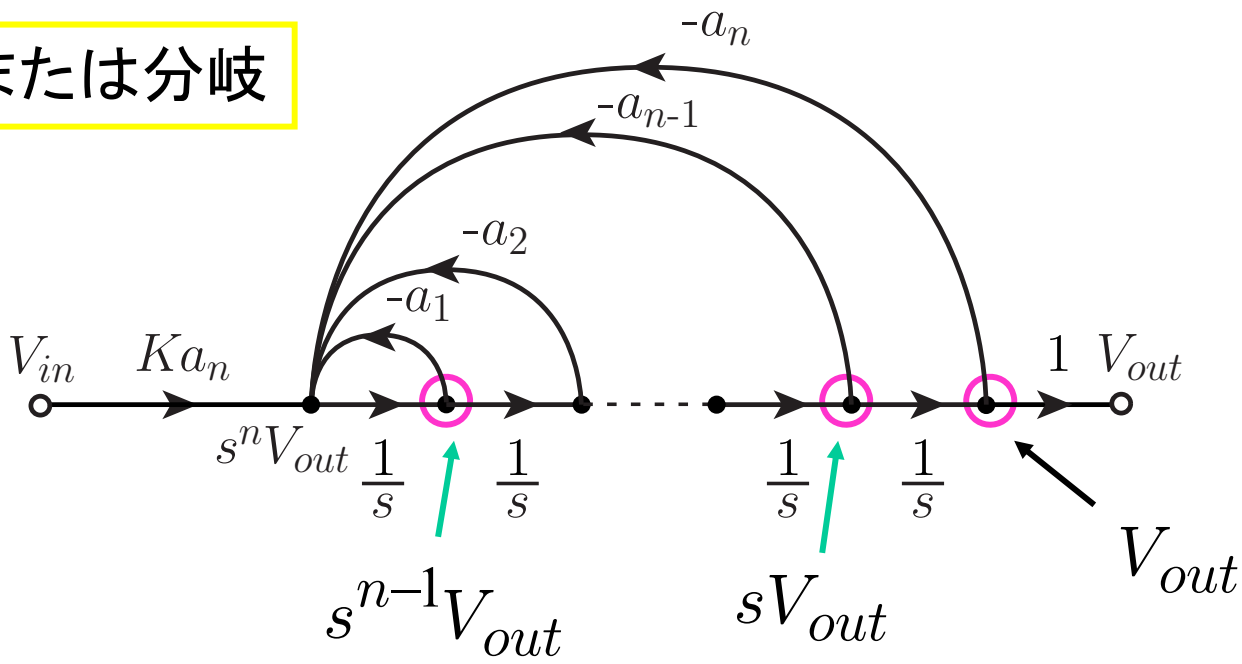
$$Ka_nV_{in}=(s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n)V_{out}$$

$$s^nV_{out}=Ka_nV_{in}-(a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n)V_{out}$$

$$s^n V_{out} = K a_n V_{in} - (a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n) V_{out}$$

黒丸：加算または分岐

矢印：乗算

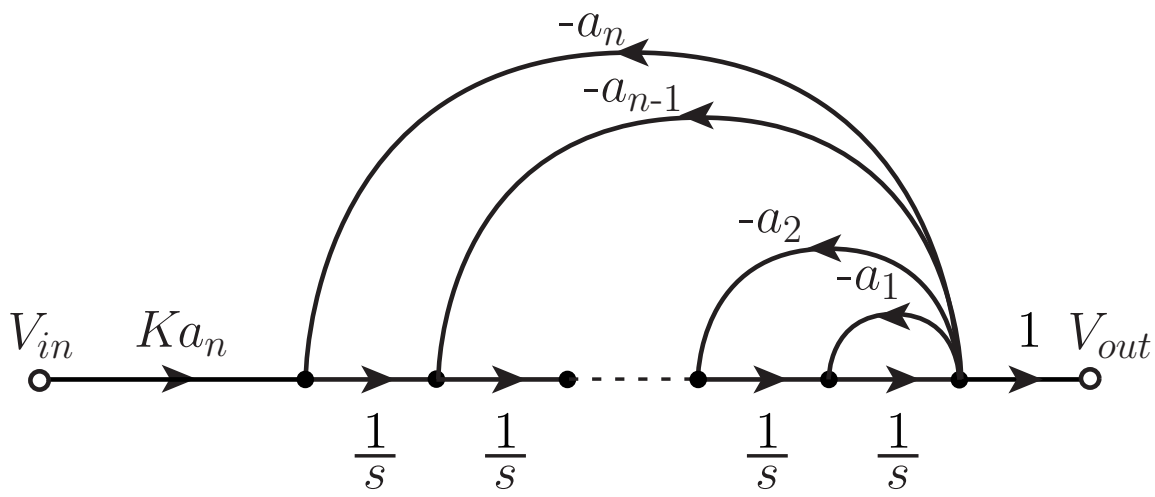


シグナルフローグラフ

他の状態変数型構成法

$$s^n V_{out} = K a_n V_{in} - (a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n) V_{out}$$

$$V_{out} = K a_n s^{-n} V_{in} - (a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} \cdots + a_{n-1} s^{-n+1} + a_n s^{-n}) V_{out}$$

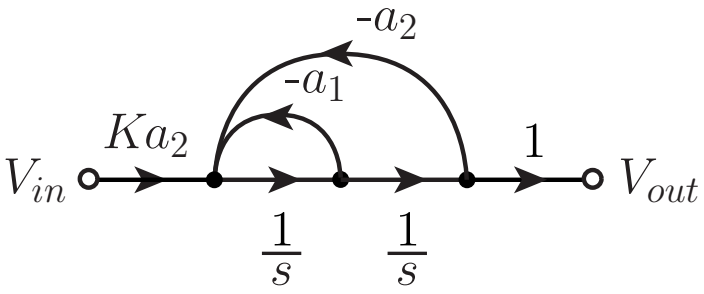


例題

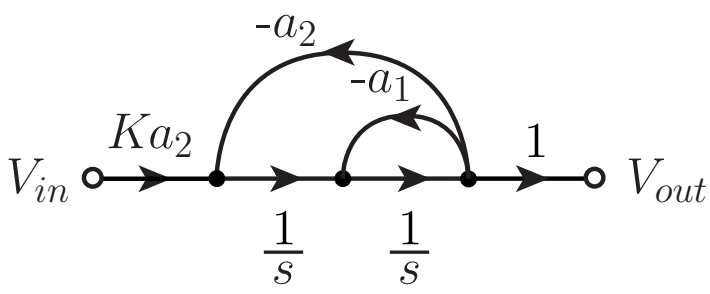
$$T_L(s)=\frac{Ka_2}{s^2+a_1s+a_2}=\frac{V_{out}}{V_{in}}$$

$$s^2V_{out}=Ka_2V_{in}-(a_1s+a_2)V_{out}$$

$$V_{out}=Ka_2s^{-2}V_{in}-(a_1s^{-1}+a_2s^{-2})V_{out}$$

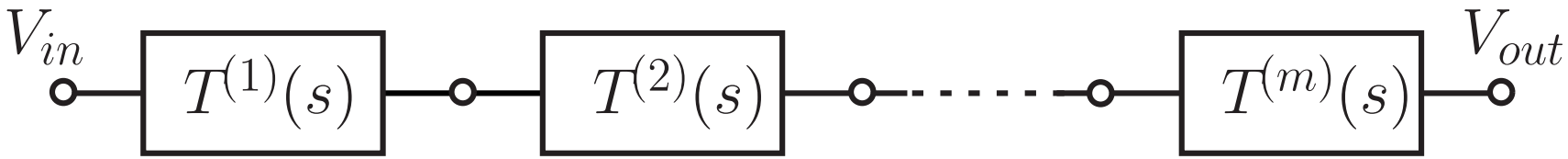


(a)



(b)

縦続接続型構成法



$$T(s)=T^{(1)}(s)T^{(2)}(s)\cdots T^{(m)}(s)$$

$T^{(i)}(s)$ ：1次または2次の伝達関数

1次の伝達関数 → 受動RC回路

2次の伝達関数 → 2次区間回路

2次区間回路とは伝達関数の分母多項式がsの2次多項式である回路

2次区間回路の伝達関数の表し方

$$T_{second}(s)=\frac{N(s)}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2}$$

ω_0: 遮断角周波数(中心角周波数)

Q：クォリティファクタ(単にQ)

(Q≥0.5である特性は受動RC回路では実現できない)

伝達関数の分子多項式によるフィルタの分類

$$T_{second}(s)=\frac{N(s)}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2}$$

$N(s)=K\omega_0{}^2$: 低域通過フィルタ

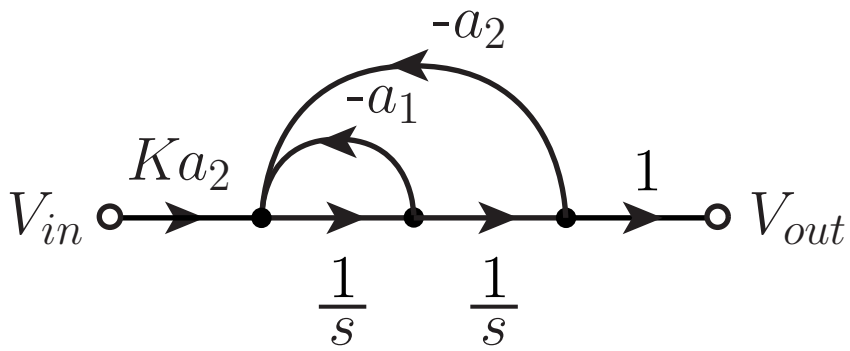
$N(s)=K\frac{\omega_0}{Q}s$: 帯域通過フィルタ

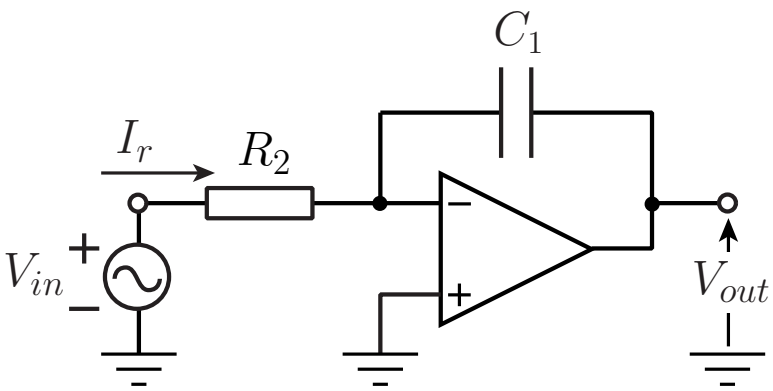
$N(s)=Ks^2$: 高域通過フィルタ

$N(s)=K(s^2+\omega_0{}^2)$: 帯域除去フィルタ

$N(s)=K(s^2-\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2)$: 全域通過フィルタ

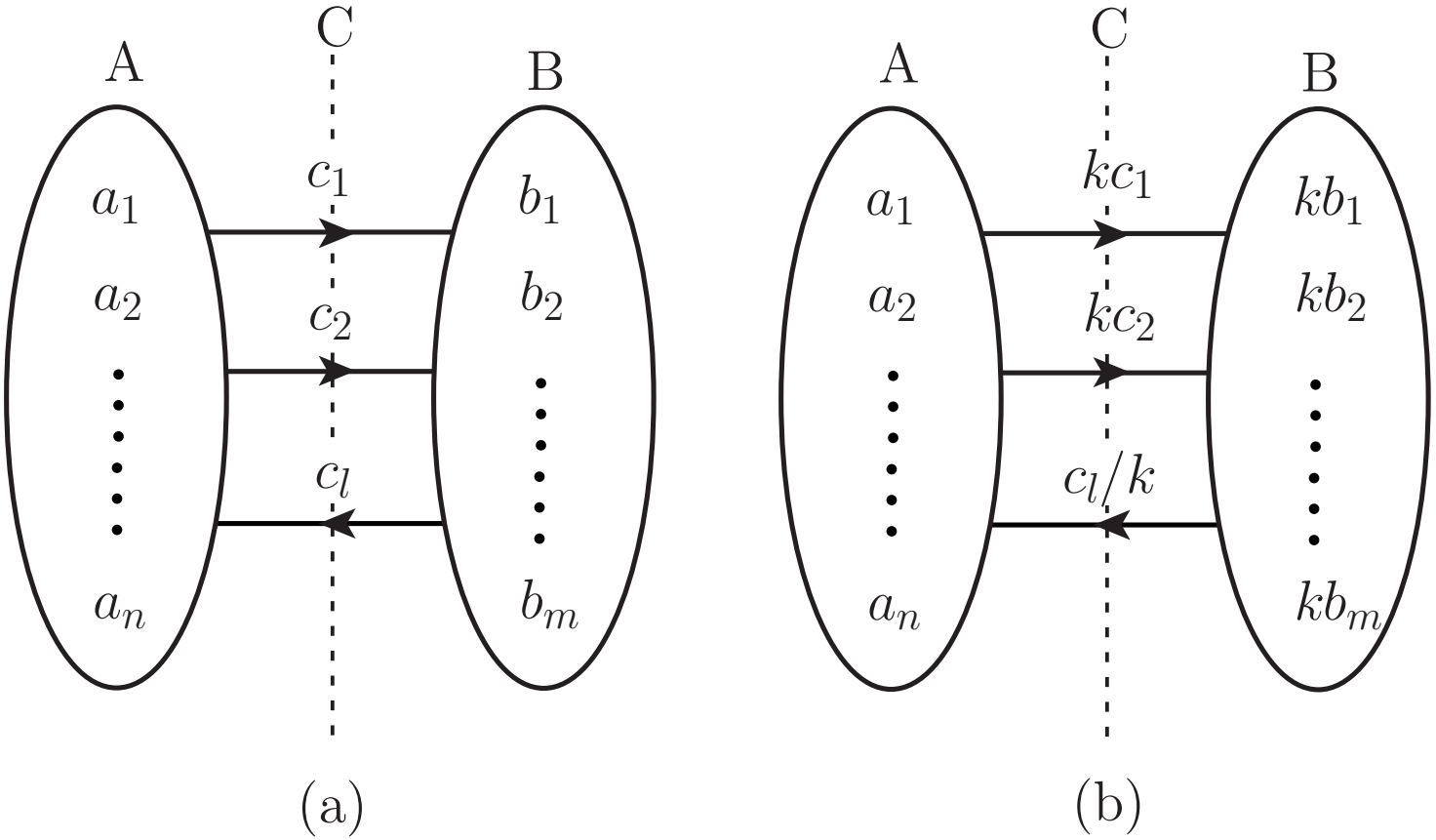
Tow-Thomasバイカッドフィルタ

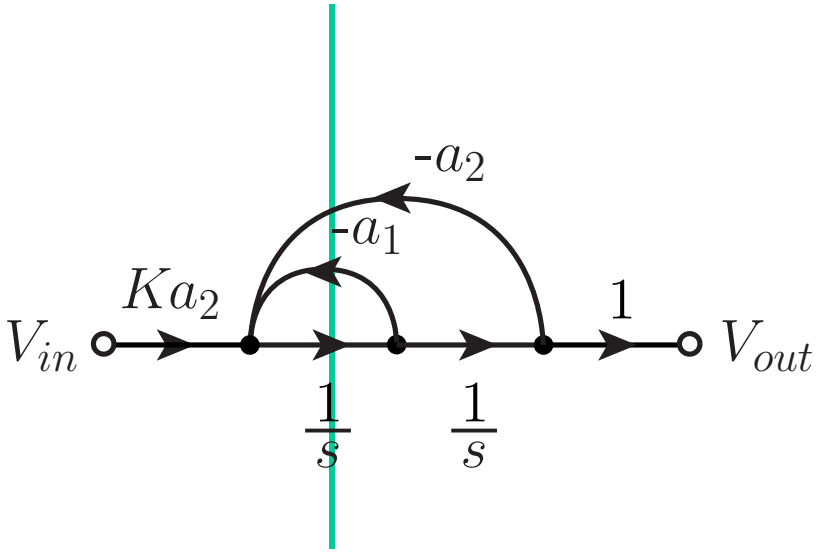


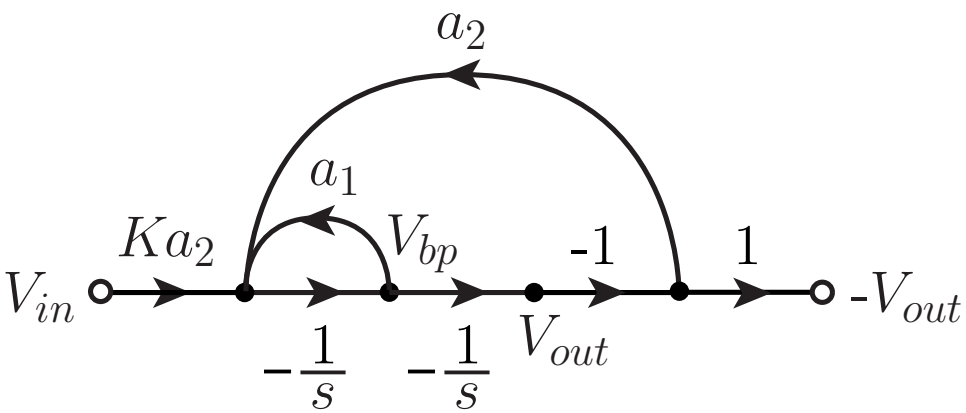


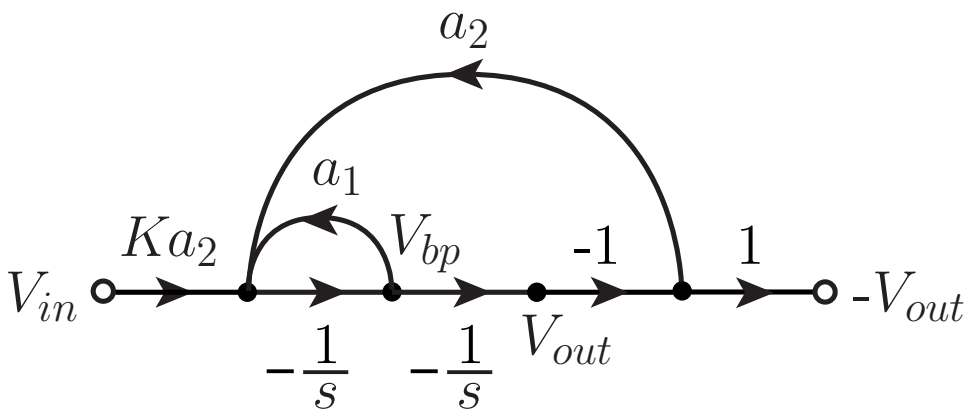
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-1}{sC_1R_2}$$

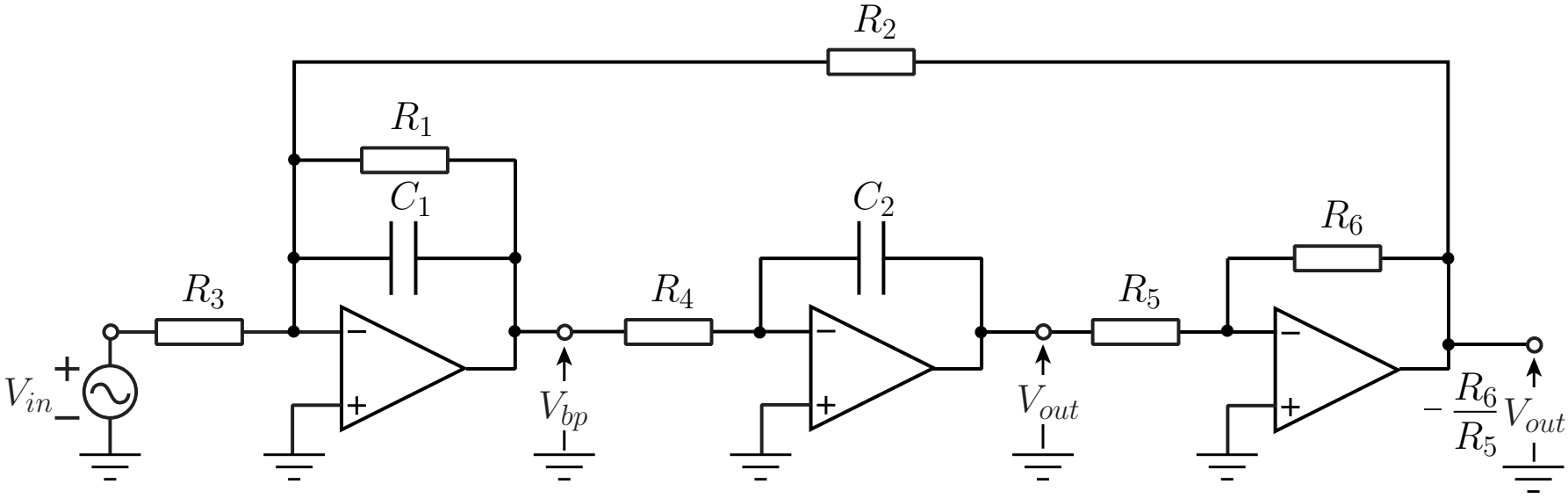
カットセット・スケーリング



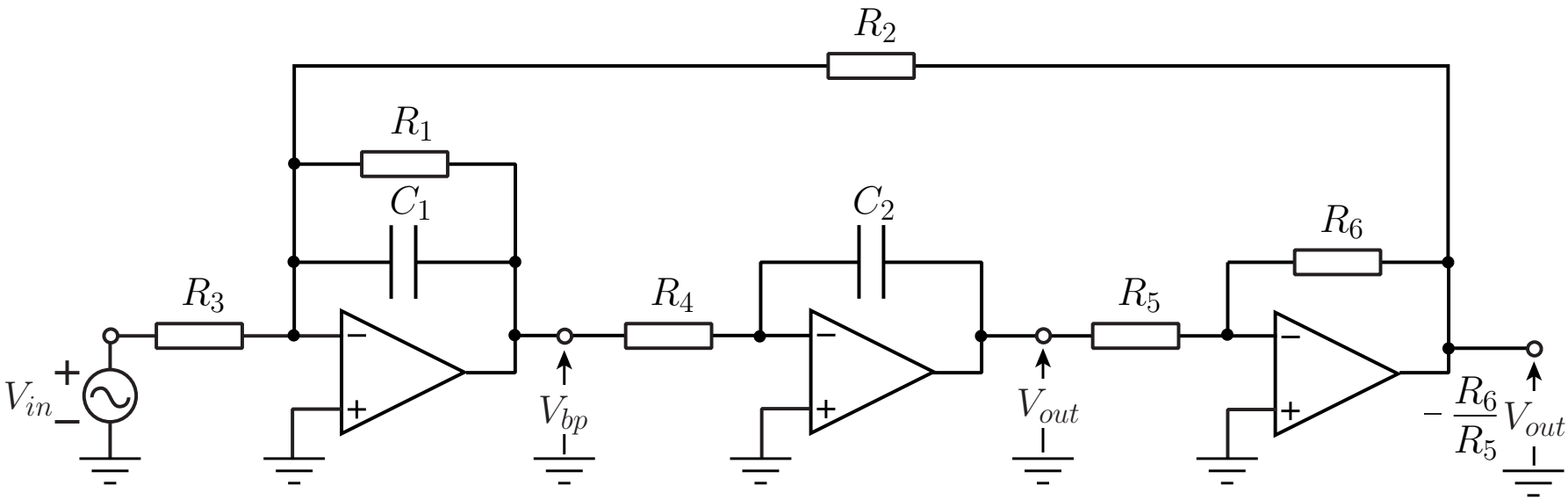

-a_2
-a_1
Ka_2
1
V_{in}
V_{out}
$\frac{1}{s}$
$\frac{1}{s}$


a_2
a_1
Ka_2
V_{bp}
-1
1
V_{in}
-V_{out}
$-\frac{1}{s}$
$-\frac{1}{s}$
V_{out}


a_2
a_1
Ka_2
V_{bp}
-1
1
V_{in}
$-V_{out}$
$-\frac{1}{s}$
$-\frac{1}{s}$
V_{out}


R_2
R_1
C_1
C_2
R_6
R_3
R_4
R_5
V_{in}
V_{bp}
V_{out}
$-\frac{R_6}{R_5}V_{out}$

素子値の決定



$$T_{biquad}(s)=\frac{\dfrac{1}{C_1C_2R_3R_4}}{s^2+\dfrac{1}{C_1R_1}s+\dfrac{R_6}{C_1C_2R_2R_4R_5}}$$

$$\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{R_6}{C_1C_2R_2R_4R_5}}}$$

$$\boxed{Q=R_1\sqrt{\frac{C_1R_6}{C_2R_2R_4R_5}}}$$

$$\boxed{K=\frac{R_2R_5}{R_3R_6}}$$

例題

遮断周波数が1.00kHz，Qが$1/\sqrt{2}$の低域通過フィルタ

$$T(s)=\frac{K(2\pi\times1000)^2}{s^2+2\sqrt{2}\pi\times1000s+(2\pi\times1000)^2}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{R_6}{C_1C_2R_2R_4R_5}} \qquad Q=R_1\sqrt{\frac{C_1R_6}{C_2R_2R_4R_5}} \qquad K=\frac{R_2R_5}{R_3R_6}$$

$$R_2=R_3=R_4=R_5=R_6 \qquad C_1=C_2$$

$$\omega_0=\frac{1}{C_1R_2}$$

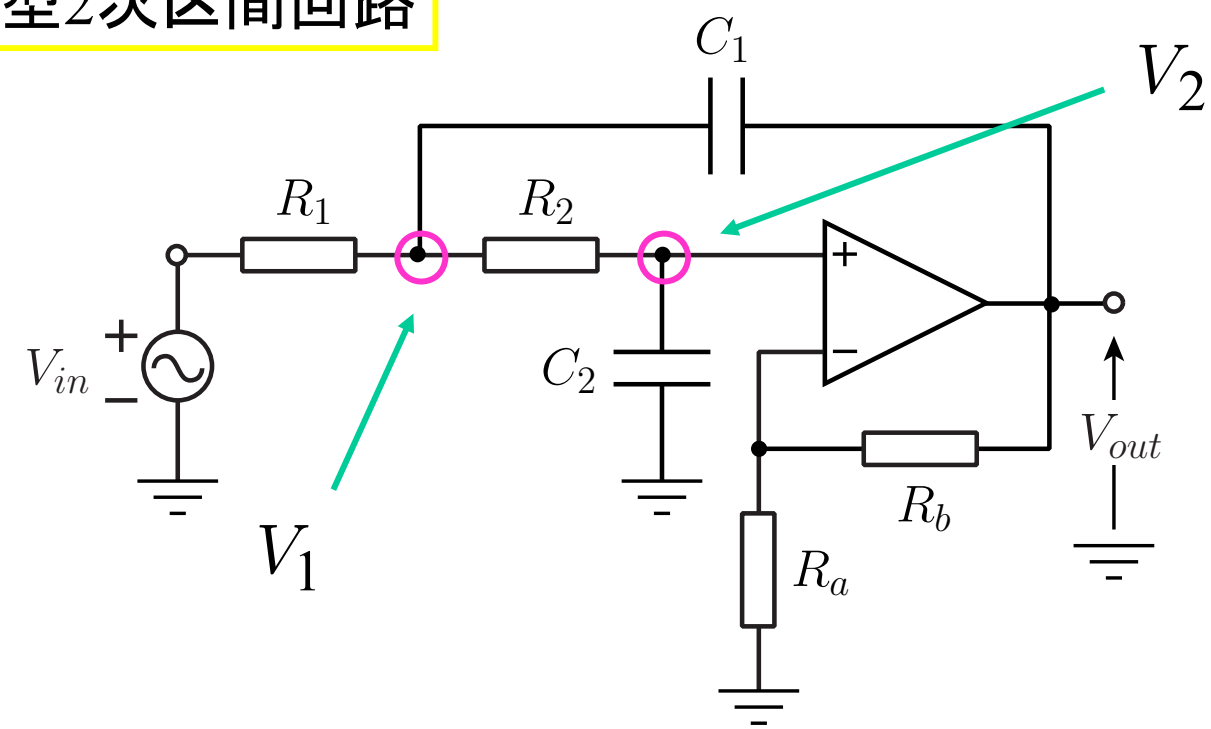
$$Q=\frac{R_1}{R_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R_2=R_3=R_4=R_5=R_6=10.0\mathrm{k}\Omega$$

$$C_1=C_2=15.9\mathrm{nF}$$

$$R_1=\frac{R_2}{\sqrt{2}}=7.07\mathrm{k}\Omega \qquad K=1.00$$

正帰還型2次区間回路



$$G_1(V_1-V_{in})+sC_1(V_1-AV_2)+G_2(V_1-V_2)=0$$

$$G_2(V_2-V_1)+sC_2V_2=0 \qquad A=1+\frac{R_b}{R_a}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} G_1+sC_1+G_2 & -sC_1A-G_2 \\ -G_2 & G_2+sC_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Cramerの公式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & y_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & y_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & y_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} G_1+sC_1+G_2 & -sC_1A-G_2 \\ -G_2 & G_2+sC_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$V_2=\frac{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2 & G_1V_{in} \\ -G_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2 & -sC_1A-G_2 \\ -G_2 & G_2+sC_2 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-(-G_2)(G_1V_{in})}{(G_1+sC_1+G_2)(G_2+sC_2)-(sC_1A+G_2)G_2}$$

$$\boxed{V_{out}=AV_2=\frac{AG_1G_2V_{in}}{s^2C_1C_2+sC_1G_2+sC_2(G_1+G_2)-sC_1G_2A+G_1G_2}}$$

$$T_{sk}(s)=\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{AG_1G_2}{s^2C_1C_2+sC_1G_2+sC_2(G_1+G_2)-sC_1G_2A+G_1G_2}$$

$$=\frac{\dfrac{A}{R_1R_2}}{s^2C_1C_2+s\dfrac{C_1(1-A)}{R_2}+sC_2\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)+\dfrac{1}{R_1R_2}}$$

$$\boxed{T_{sk}(s)=\frac{\dfrac{A}{C_1C_2R_1R_2}}{s^2+\dfrac{C_1R_1(1-A)+C_2R_1+C_2R_2}{C_1C_2R_1R_2}s+\dfrac{1}{C_1C_2R_1R_2}}}$$

例題

遮断周波数が1.00kHz，Qが$1/\sqrt{2}$の低域通過フィルタ

$$T(s)=\frac{K(2\pi\times1000)^2}{s^2+2\sqrt{2}\pi\times1000s+(2\pi\times1000)^2}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{C_1C_2R_1R_2}} \qquad Q=\frac{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}}{C_1R_1(1-A)+C_2R_1+C_2R_2} \qquad K=A$$

(1) $R_1=R_2=R \qquad C_1=C_2=C$

$$\omega_0=\frac{1}{CR} \qquad Q=\frac{1}{3-A}$$

(2) $R_1=R_2=R \qquad A=1$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{C_1C_2}R} \qquad Q=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

(1) $C_1 = C_2 = 15.9\text{nF}$

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{\omega_0 C} = 10.0\text{k}\Omega$$

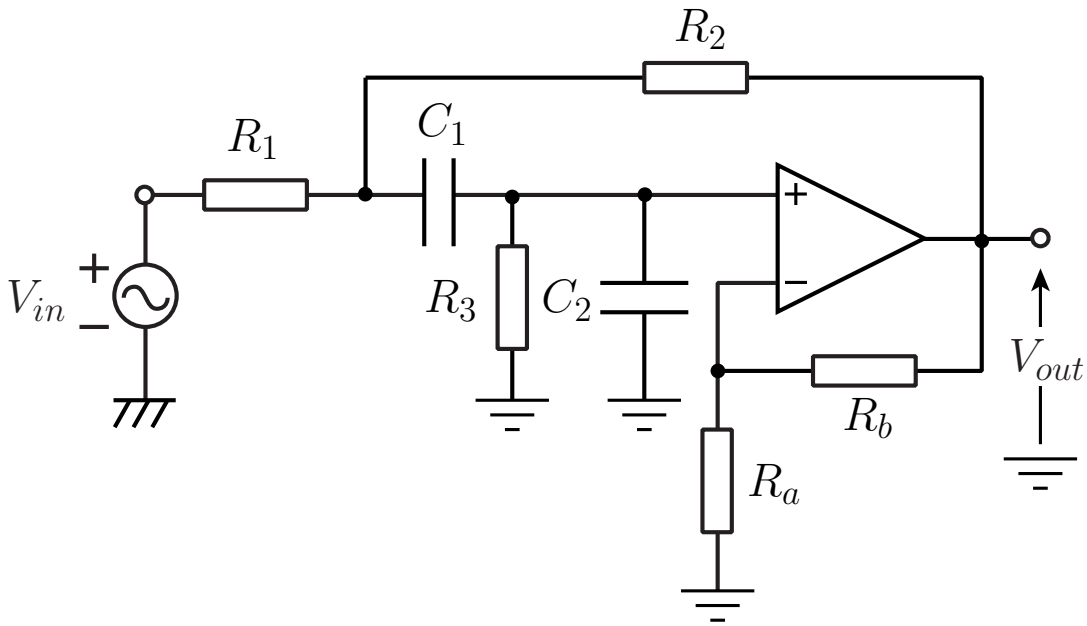
$$A = 3 - \frac{1}{Q} = 3 - \sqrt{2} \qquad R_a = 10.0\text{k}\Omega \qquad R_b = 5.86\text{k}\Omega$$

(2) $R_1 = R_2 = 10.0\text{k}\Omega \qquad A = 1 \qquad R_a = \infty \quad R_b = 0\text{k}\Omega$

$$C_1 = \frac{2Q}{\omega_0 R} = \sqrt{2} \times 15.9\text{nF} = 22.5\text{nF}$$

$$C_2 = \frac{1}{2Q\omega_0 R} = \frac{15.9\text{nF}}{\sqrt{2}} = 11.2\text{nF}$$

帯域通過フィルタの構成



$$\begin{bmatrix} G_1+sC_1+G_2 & -sC_1-G_2A \\ -sC_1 & sC_1+G_3+sC_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A=1+\frac{R_b}{R_a}$$

$$\begin{bmatrix} G_1+sC_1+G_2 & -sC_1-G_2A \\ -sC_1 & sC_1+G_3+sC_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2=\frac{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2 & G_1V_{in} \\ -sC_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2 & -sC_1-G_2A \\ -sC_1 & sC_1+G_3+sC_2 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-(-sC_1)(G_1V_{in})}{(G_1+sC_1+G_2)(sC_1+G_3+sC_2)-(sC_1+G_2A)sC_1}$$

$$=\frac{sC_1G_1V_{in}}{s^2C_1C_2+sC_1(G_1+G_2+G_3-G_2A)+sC_2(G_1+G_2)+(G_1+G_2)G_3}$$

$$V_2=\frac{sC_1G_1V_{in}}{s^2C_1C_2+sC_1(G_1+G_2+G_3-G_2A)+sC_2(G_1+G_2)+(G_1+G_2)G_3}$$

$$\boxed{T_{sk}(s)=\frac{\frac{A}{C_2R_1}s}{s^2+s\left\{\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}\right)+\frac{1-A}{C_2R_2}\right\}+\frac{1}{C_1C_2R_3}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}}$$

例題

$$R_1=R_2=R_3=R \qquad C_1=C_2=C$$

$$R=\frac{\sqrt{2}}{\omega_0 C} \qquad A=5-\frac{\sqrt{2}}{Q} \qquad K=\frac{5}{\sqrt{2}}Q-1$$

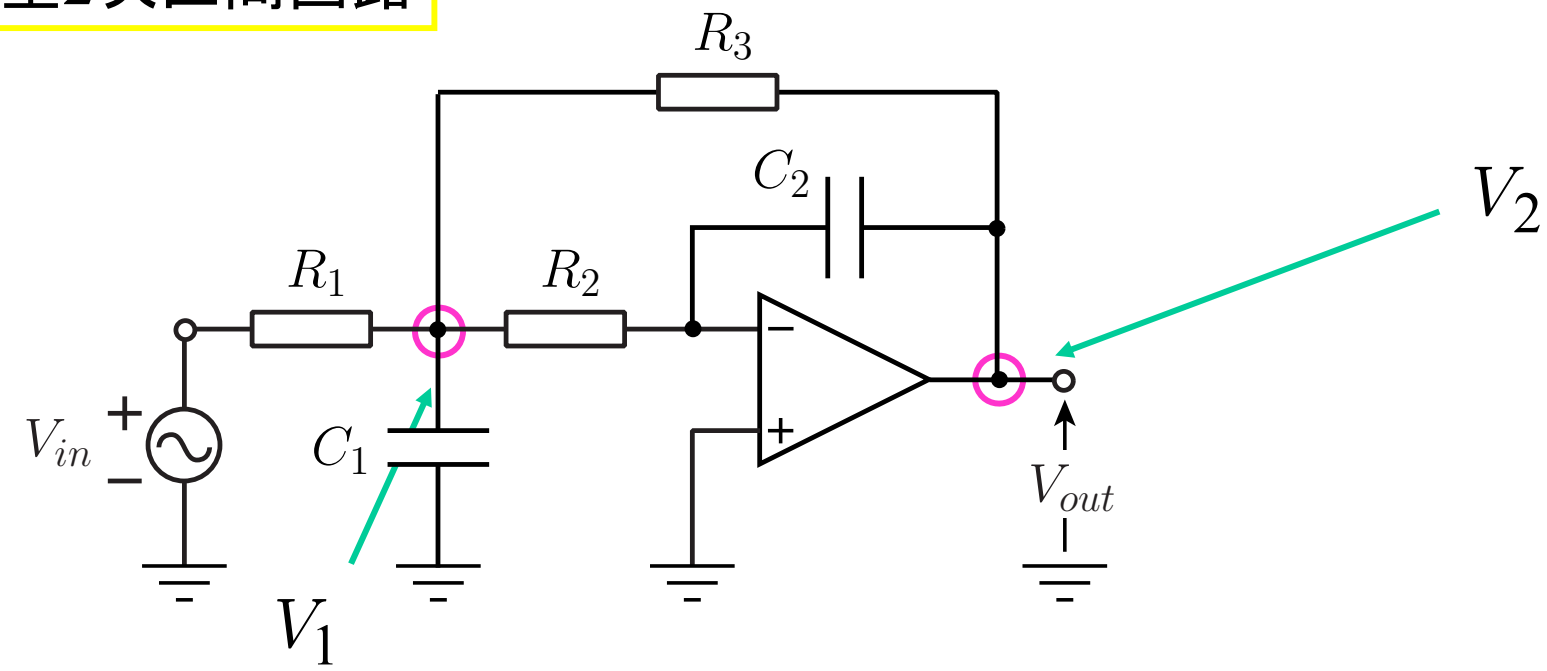
$$\boxed{T(s)=\frac{K(2\sqrt{2}\pi\times 1000s)}{s^2+2\sqrt{2}\pi\times 1000s+(2\pi\times 1000)^2}}$$

C=15.9nFとすると

$$R=14.1\mathrm{k}\Omega$$

$$A=3 \qquad R_a=14.1\mathrm{k}\Omega \qquad R_b=28.2\mathrm{k}\Omega$$

負帰還型2次区間回路



$$G_1(V_1-V_{in})+sC_1V_1+G_2V_1+G_3(V_1-V_2)=0$$

$$G_2(0-V_1)+sC_2(0-V_2)=0$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} G_1+sC_1+G_2+G_3 & -G_3 \\ -G_2 & -sC_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} G_1+sC_1+G_2+G_3 & -G_3 \\ -G_2 & -sC_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$V_2=\frac{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2+G_3 & G_1V_{in} \\ -G_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+sC_1+G_2+G_3 & -G_3 \\ -G_2 & -sC_2 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-(-G_2)(G_1V_{in})}{(G_1+sC_1+G_2+G_3)(-sC_2)-(-G_2)(-G_3)}$$

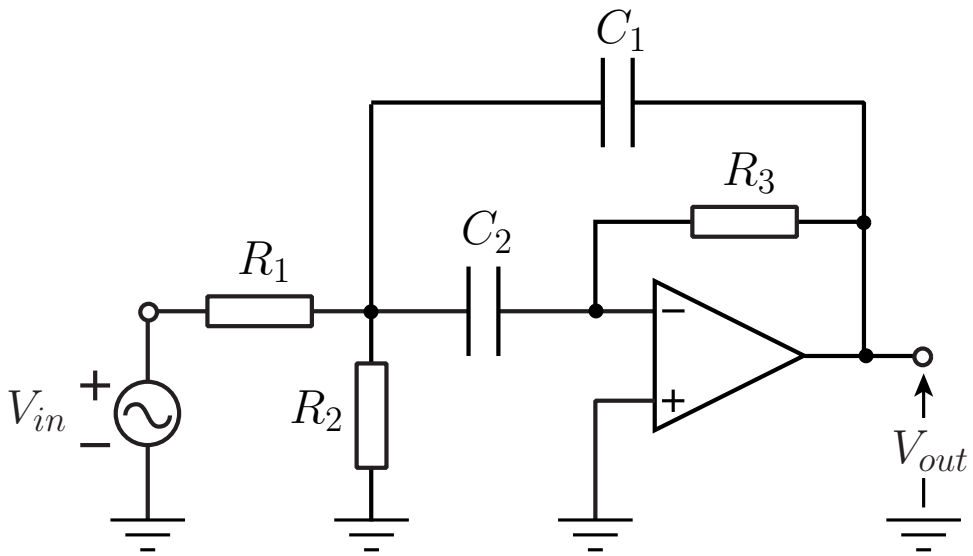
$$\boxed{V_{out}=V_2=\frac{-G_1G_2V_{in}}{s^2C_1C_2+sC_2(G_1+G_2+G_3)+G_2G_3}}$$

$$\boxed{T_{delly}(s)=\frac{-G_1G_2V_{in}}{s^2C_1C_2+sC_2(G_1+G_2+G_3)+G_2G_3}}$$

$$=\frac{\dfrac{-1}{C_1C_2R_2R_3}}{s^2+s\dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}\right)+\dfrac{1}{C_1C_2R_2R_3}}$$

$$R_1=R_2=R_3=R \qquad C_1=\frac{3Q}{\omega_0R} \quad C_2=\frac{1}{3Q\omega_0R}$$

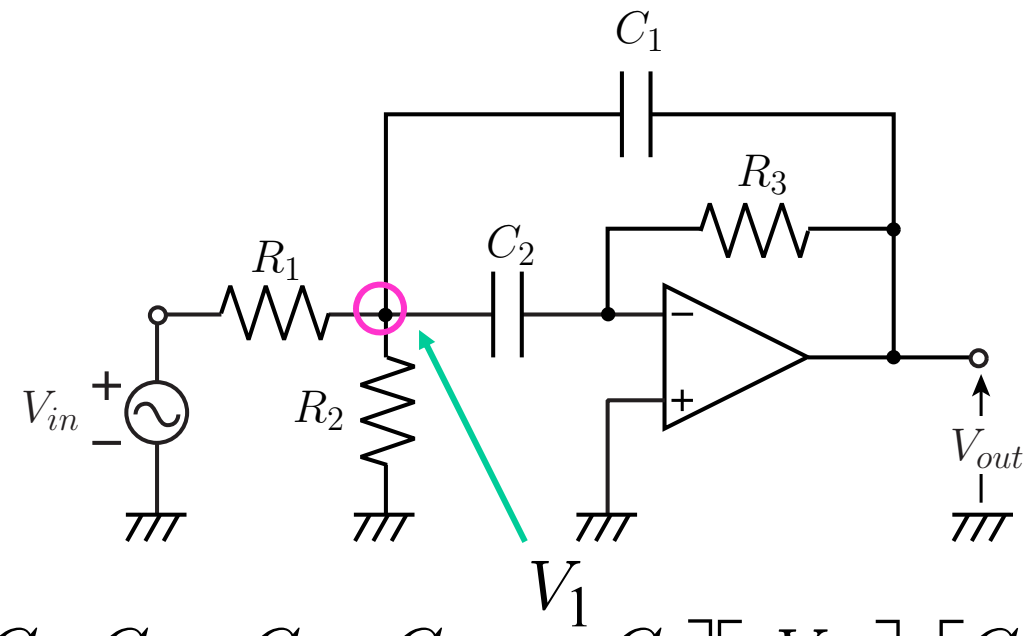
負帰還型2次帯域通過フィルタ



$$T_{delly-bp}(s)=\frac{-s\dfrac{1}{C_1R_1}}{s^2+s\left(\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}\right)\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{C_1C_2R_3}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)}$$

$$C_1=C_2=C$$

$$R_1=R_2=\frac{1}{Q\omega_0C} \qquad R_3=\frac{2Q}{\omega_0C}$$



$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+sC_1+sC_2 & -sC_1 \\ -sC_2 & -G_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_{out} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_1V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{out}=\frac{\begin{vmatrix} G_1+G_2+sC_1+sC_2 & G_1V_{in} \\ -sC_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+G_2+sC_1+sC_2 & -sC_1 \\ -sC_2 & -G_3 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-(-sC_2)(G_1V_{in})}{(G_1+G_2+sC_1+sC_2)(-G_3)-(-sC_1)(-sC_2)}$$

$$V_{out}=\frac{\begin{vmatrix} G_1+G_2+sC_1+sC_2 & G_1V_{in} \\ -sC_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+G_2+sC_1+sC_2 & -sC_1 \\ -sC_2 & -G_3 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-(-sC_2)(G_1V_{in})}{(G_1+G_2+sC_1+sC_2)(-G_3)-(-sC_1)(-sC_2)}$$

$$\boxed{T_{delly-bp}(s)=\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{-sC_2G_1}{s^2C_1C_2+s(C_1+C_2)G_3+G_3(G_1+G_2)}=\frac{-s\frac{1}{C_1R_1}}{s^2+s(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\frac{1}{R_3}+\frac{1}{C_1C_2R_3}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})}}$$