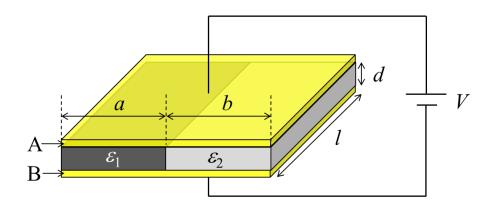
## 電磁気学第一 演習 第12回 解答

45. 図のように間隔a,幅l の平行導体板A, B間に長さa で誘電率 $\epsilon_1$ ,長さb で誘電率 $\epsilon_2$  の 誘電体が満たしてある。A, B 間の静電容量および、電位差V を与えたときの導体板上 正極側の真電荷分布を求めよ。ただし、端部効果は無視する。ヒント:誘電体の電界 を求め、導体表面において誘電体を含むガウスの法則を 2 つの誘電体それぞれの場合 で用い、導体表面の電荷密度を求める。



## 【解答】

 $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  の部分では上下に電極があるから電位が等しいので、全空間で電界は一様となる(また、電界の媒質境界での接線成分は連続(等しい)なので、 $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  の媒質境界で電界分布は乱されない。電東密度の接線成分は $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  の媒質境界で不連続となっているが、境界条件では法線成分の連続性しか要求されないので、接線成分は不連続でも構わない)。電位差V を与えると、

$$\sigma_1 = D_1 = \varepsilon_1 E = \varepsilon_1 \frac{V}{d}$$

$$\sigma_2 = D_2 = \varepsilon_2 E = \varepsilon_2 \frac{V}{d}$$

より、

$$Q = \frac{lV}{d}(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b)$$

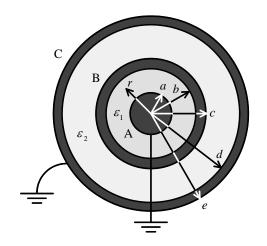
よって、

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{l}{d} (\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b)$$

48. 図に示すように、半径a の導体球 A と内半径a 、外半径e の同心導体球殻 C 間にこれらと中心を同じくして内半径b 、外半径c の導体球殻 B が挿入されている。導体 A,B 間は誘電率 $\epsilon_1$  の誘電体で満たされており、導体 B,C の間は誘電率 $\epsilon_2$  の誘電体で満たされている。さらに導体 A,C は接地されている。今導体 B に電荷量 Q を与えた。以下の間に答えよ。

(ヒント: r=a,b,c,d,e における真電荷の総和をそれぞれ $Q_a,Q_b,Q_c,Q_d,Q_e$  とおき、それぞれの領域で成り立つ条件を考え、電荷間の関係を求めていく。特に、電極 A,C は接地されているため、A から B の電圧と、C から B の電圧は同じになることに注意。)

- (1) 球の中心からr = a, b, c, d, e における真電荷量、分極電荷量を符号も含めて求めよ。
- (2) 導体 B と導体 AC 間の静電容量を求めよ。



## 【解答】

(1) r=a,b,c,d,e における真電荷の総和をそれぞれ $Q_a,Q_b,Q_c,Q_d,Q_e$  とおく。すると、 $Q=Q_b+Q_c$ 

今導体 B の内部に閉曲面をとりガウスの法則を適用する。導体内部は電界が 0 であるから、  $Q_a + Q_b = 0$ 

導体 C の内部に閉曲面をとりガウスの法則を適用すると、同様にして、

$$Q_c + Q_d = 0$$

もし $Q_e$ が有限の値であると、無限遠と導体 C は電位差を持つことになる。しかし今導体 C は接地されているので、

$$Q_a = 0$$

対称性により電界は放射方向成分rのみの関数である。 $a \le r \le b$ に球状の閉曲面をとりガ

ウスの法則を適用すると、

$$E(r) = \frac{-Q_b}{4\pi\varepsilon_1 r^2}$$

 $c \le r \le d$  に球状の閉曲面をとりガウスの法則を適用すると、

$$E(r) = \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_2 r^2}$$

導体AとCはともに接地されているので電位差は0なので、

$$-\int_{a}^{d} E(r) dr = -\int_{a}^{b} \frac{-Q_{b}}{4\pi\varepsilon_{1}r^{2}} dr - \int_{c}^{d} \frac{Q_{c}}{4\pi\varepsilon_{2}r^{2}} dr = \frac{Q_{b}}{4\pi\varepsilon_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{Q_{c}}{4\pi\varepsilon_{2}} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{c}\right) = 0$$

よって、

$$Q_{b} = \frac{\varepsilon_{1}ab(d-c)}{\varepsilon_{1}ab(d-c) + \varepsilon_{2}cd(b-a)}Q$$

$$Q_{c} = \frac{\varepsilon_{2}cd (b-a)}{\varepsilon_{1}ab (d-c) + \varepsilon_{2}cd (b-a)}Q$$

これより、

$$Q_{a} = -\frac{\varepsilon_{1}ab(d-c)}{\varepsilon_{1}ab(d-c) + \varepsilon_{2}cd(b-a)}Q$$

$$Q_{d} = -\frac{\varepsilon_{2}cd(b-a)}{\varepsilon_{2}ab(d-c) + \varepsilon_{2}cd(b-a)}Q$$

r=a,b,c,d,e における分極電荷を qa,qb,qc,qd,qe とおくと、r>e は真空なので、

$$q_a = 0$$

導体Bの内部に閉曲面をとりガウスの法則を適用すると、導体内部は電界が0であるから、

$$Q_a + q_a + Q_b + q_b = q_a + q_b = 0$$

導体 C の内部に閉曲面をとりガウスの法則を適用すると、

$$Q_a + q_a + Q_b + q_b + Q_c + q_c + Q_d + q_d = q_c + q_d = 0$$

a≤r≤bにおける電界を分極電荷により表し、誘電率で表したものと比較することにより、

$$\frac{Q_a + q_a}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_1 r^2} \implies$$

$$q_{a} = \left(\frac{\varepsilon_{0}}{\varepsilon_{1}} - 1\right)Q_{a} = -\frac{\varepsilon_{1}ab(d - c)}{\varepsilon_{1}ab(d - c) + \varepsilon_{2}cd(b - a)}\left(\frac{\varepsilon_{0}}{\varepsilon_{1}} - 1\right)Q$$

$$q_{b} = \left(\frac{\varepsilon_{0}}{\varepsilon_{1}} - 1\right)Q_{b} = \frac{\varepsilon_{1}ab(d - c)}{\varepsilon_{1}ab(d - c) + \varepsilon_{2}cd(b - a)}\left(\frac{\varepsilon_{0}}{\varepsilon_{1}} - 1\right)Q$$

同様に c≤r≤d における電界を分極電荷により表し、誘電率で表したものと比較することにより、

$$q_{c} = \left(\frac{\varepsilon_{0}}{\varepsilon_{2}} - 1\right)Q_{c} = \frac{\varepsilon_{2}cd(b-a)}{\varepsilon_{1}ab(d-c) + \varepsilon_{2}cd(b-a)}\left(\frac{\varepsilon_{0}}{\varepsilon_{2}} - 1\right)Q$$

$$q_{d} = \left(\frac{\varepsilon_{0}}{\varepsilon_{2}} - 1\right)Q_{d} = -\frac{\varepsilon_{2}cd(b-a)}{\varepsilon_{1}ab(d-c) + \varepsilon_{2}cd(b-a)}\left(\frac{\varepsilon_{0}}{\varepsilon_{2}} - 1\right)Q$$

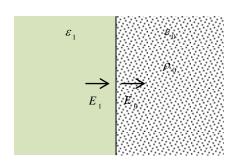
(2) 導体 B の電位 V は、

$$V = -\int_{a}^{b} \frac{Q_{a}}{4\pi\varepsilon_{1}r^{2}} dr = \frac{Q_{a}}{4\pi\varepsilon_{1}} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

よって静電容量は、

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi \left( \varepsilon_1 \frac{ab}{b-a} + \varepsilon_2 \frac{cd}{d-c} \right)$$

- 48'. 図のように、平面境界を境に左の空間は誘電率 $\varepsilon_1$ の誘電体で満たされ、右の空間は誘電率 $\varepsilon_0$ で一様な電荷密度 $\rho_0$ で満たされている。左右の空間にそれぞれ $E_1$ ,  $E_0$ の電界の境界垂直成分があるとき、次の量を求めよ。
  - (i) 左右の空間の電東密度  $D_{_1},\ D_{_0}$  と、境界上の真電荷の面電荷密度  $\sigma$
  - (ii) 境界上の分極電荷の面電荷密度 σ<sub>σ</sub>



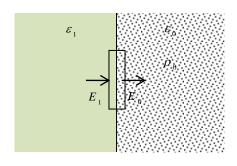
## 【解答】

(i)

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1$$

$$D_0 = \varepsilon_0 E_0$$

$$D_0 - D_1 = \sigma$$



$$\sigma = D_0 - D_1 = \varepsilon_0 E_0 - \varepsilon_1 E_1$$

(ii)

$$\left(\iint_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{V} \frac{\rho + \rho_{p}}{\varepsilon_{0}} dv \, \, \mathcal{L} \, \mathcal{V} \right)$$

$$E_0 - E_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} (\sigma + \sigma_p)$$

$$\sigma_{p} = \varepsilon_{0} E_{0} - \varepsilon_{0} E_{1} - \sigma$$
$$= (\varepsilon_{1} - \varepsilon_{0}) E_{1}$$