2016-5-2

電磁気学第一　中間学力確認（解答例）

浅田、小寺

想定配点(100 点満点)

1 (28)
(a) 7
(b) 7
(c) 7
(d) 7

2 (30)
(a) 6
(b) 6
(c) 6
(d) 6
(e) 6

3 (26)
(a) 9
(b) 8
(c) 9

4 (16)
(a) 6
(b)10

1.

(a)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}z^2 + \frac{\partial}{\partial z}(ayz) = 1 + ay$$

(b)

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & z^2 & ayz \end{vmatrix} = (a-2)z\boldsymbol{i}$$

(c)

保存界のときは $\mathrm{curl}\boldsymbol{A} = 0$ なので、(b)より $a = 2$

(d)

保存界の場合、積分値は経路によらない。そこで簡単な経路として、原点から x 軸に沿って(1,0,0)まで行き(C1)、そこから y 軸と並行に P(1,1,0)まで行く(C2)。

$$\int_{\mathrm{O}\to\mathrm{P}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\mathrm{C1}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\mathrm{C2}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^1 x dx + \int_0^1 0 dy = \frac{1}{2}$$

2.

(a) $$\oiint_S E\cdot dS = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dv$$

任意の閉曲面上で外へ出る電界を表面で積分した値は、その閉曲面内にある電荷の総量を真空の誘電率で割った値に等しい。

(b) $$\mathrm{div}E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(c) $$\oint_C E\cdot dl = 0$$

任意の閉曲線に沿った電界の線積分は０。

（または、2 点を結ぶ経路に沿った電界の積分の値は、経路によらない、など。）

(d) $curl E = 0$　あるいは $E = -\mathrm{grad}V$ でもよい

(e) (d)から $E = -gradV$ により電位 Vが定義できる。これを(b)に代入して

$$div(-gradV) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{あるいは} \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

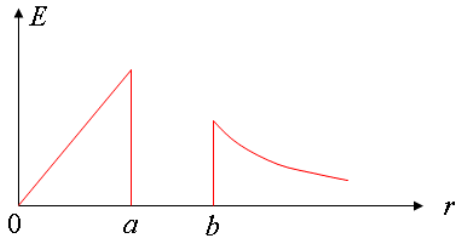
3.

(a)　対称性から電界は r 方向のみになる。ガウスの法則を用いて

$0 \leq r \leq a$ のとき　$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ より　$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$

$a < r < b$ のとき　$E = 0$

$b \leq r$ のとき　$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi a^3 \rho$ より　$E = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$



(b)　$r = b$ において $E = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{b^2}$ より　$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{\rho a^3}{3b^2}$

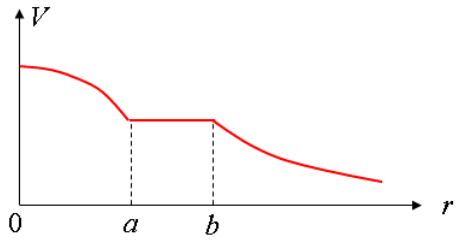
(c)　無限遠点を基準に外側から順に積分していく

$b \leq r$ のとき　$V = -\int_\infty^r E dr = -\int_\infty^r \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} dr = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}$

$a < r < b$ のとき　$V = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{b}$

$0 \leq r \leq a$ のとき　$V = -\int_\infty^r E dr = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{b} - \int_a^r E dr$

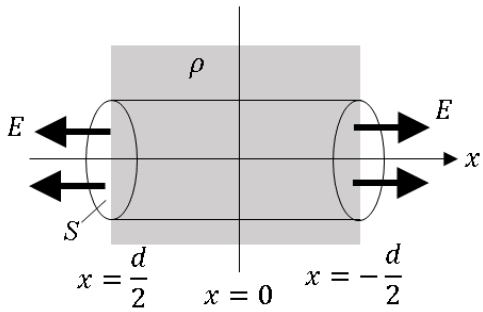
$$= \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{b} - \int_a^r \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a^3}{b} + \frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right)$$



4.

(a)　右図の円筒閉曲面に対してガウスの法則を用いて

$$2ES = \frac{\rho}{\varepsilon_0} Sd \quad \text{から} \quad E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$



(b)

$-\frac{d}{2} \le x \le \frac{d}{2}$ において

$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ より $V(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2 + Ax + B$ （AとBは積分定数）

$V(0) = 0$ および $V(x) = V(-x)$（左右対称）から $A = B = 0$

$\frac{d}{2} \le x$ において

$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$ より $V(x) = Cx + D$ （CとDは積分定数）

$x = \frac{d}{2}$ において (a)から $E = -\frac{\partial V}{\partial x} = -C = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$ 、および

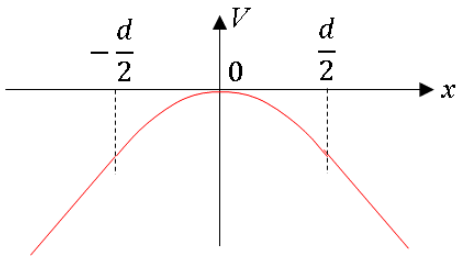
$x = \frac{d}{2}$ において Vが連続であることから $-\frac{\rho d^2}{8\varepsilon_0} = C\frac{d}{2} + D$

これらから $C = -\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$ 、$D = \frac{\rho d^2}{8\varepsilon_0}$

$x \le -\frac{d}{2}$ の解は　$\frac{d}{2} \le x$ の解を用いて $V(x) = V(-x)$から得られる

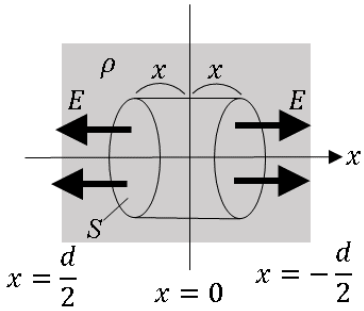
まとめると

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2 & \left(-\frac{d}{2} \le x \le \frac{d}{2}\right) \\ -\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}x + \frac{\rho d^2}{8\varepsilon_0} & \left(\frac{d}{2} < x\right) \\ \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}x + \frac{\rho d^2}{8\varepsilon_0} & \left(x < -\frac{d}{2}\right) \end{cases}$$



(別解) 右図の円筒閉曲面に対してガウスの法則を用いて

$-\frac{d}{2} \le x \le \frac{d}{2}$ では　$2ES = \frac{\rho}{\varepsilon_0}2xS$ から　$E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}x$

$x < -\frac{d}{2}$ および $\frac{d}{2} < x$ では　(a)と同様に　$E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$

これらから $V = -\int_0^x E dx$ により電位が求められる