2.分布定数線路

2.1 電信方程式

二つの導体(conductor)からなる**伝送線路**(transmission line)を考える。

(注意)**導波管**でも**固有モード**(eigen mode)の横電界(transvers electric field component), 横磁界成分(transverse magnetic field component)に対応させて電圧(voltage)及び電流(current)を定義すれば，二導体系線路と同様に扱うことができる。

$$V(z+\Delta z)=V(z)+\frac{dV(z)}{dz}\Delta z \qquad (2.1.a)$$

$$I(z+\Delta z)=I(z)+\frac{dI(z)}{dz}\Delta z \qquad (2.1.b)$$

ここで，伝送線路の**等価回路**(equivalent circuit)を考えてみる。
導体に電流が流れ，導体間に電位差が発生すると，次のことが起こる。

導体に電流が流れる → 磁界(magnetic field)が発生
→ **磁界のエネルギー**(energy) → **インダクタンス**(inductance)が存在

導体間の電位差 → **静電容量**(capacitance)が存在

さらに，導体や導体間の媒質が理想的な状態でない場合，次のことを考慮する必要がある。

導体の導電率(conductivity)は無限ではない（理想導体ではない）
→ 導体に直列抵抗(series resistance)

導体間の媒質は理想的な絶縁体（誘電体(dielectric)）ではない
→ 並列抵抗(parallel resistance)

これらを考慮すると, 二導体系の伝送線路の（単位長さ当たりの）等価回路は次のようになる。
ただし，伝搬方向で伝送線路は均一であると仮定する。

直列インピーダンス　$Z_d = R + j\omega L$　（Ω/m）
並列アドミッタンス　$Y_d = G + j\omega C$　（Ω^{-1}/m）

したがって，この等価回路について次の関係式が成り立つ。

$$V(z)=(Z_d\Delta z)I(z)+V(z+\Delta z)$$

$$\frac{dV(z)}{dz}=-Z_d I(z) \qquad (2.2)$$

$$\frac{dI(z)}{dz}=-Y_d V(z) \qquad (2.3)$$

この微分方程式は，**電信方程式**(lineman's equation, telegraphic equation)と呼ばれ，次の微分方程式に整理される。

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2}=Z_d Y_d V(z) \qquad (2.4)$$

式(2.4)の微分方程式の一般解(general solution)は，次のようになる。

$$\therefore V(z)=V_1 e^{-\gamma z}+V_2 e^{+\gamma z} \qquad (2.5)$$

$$I(z)=\frac{\gamma}{Z_d}\left(V_1e^{-\gamma z}-V_2e^{+\gamma z}\right)=\frac{1}{Z_c}\left(V_1e^{-\gamma z}-V_2e^{+\gamma z}\right) \tag{2.6}$$

ここで，重要なパラメータは，γ：**伝搬定数**(propagation constant)，Z_c：**特性インピーダンス**(characteristic impedance)は次のようになる。

$$\gamma=\sqrt{Z_dY_d}=\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}=\alpha+j\beta \tag{2.7}$$

$$\frac{Z_d}{\gamma}=\sqrt{\frac{Z_d}{Y_d}}=\sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}=Z_c \tag{2.8}$$

特に，分布定数線路が**無損失**(loss-less)の場合，$R=G=0$ であり，それぞれ次のようになる。

$$\gamma=\sqrt{j\omega Lj\omega C}=j\omega\sqrt{LC}=j\beta \tag{2.9}$$

$$Z_c=\sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}}=\sqrt{\frac{L}{C}}=R_c \tag{2.10}$$

ここで，β：**位相定数**(phase constant)，R_c：**特性抵抗**(characteristic resistance)と呼ぶ。

2.2 反射係数と入力インピーダンス

電源(source)を原点(origin)として伝送線路に沿った座標系(coordinate)を z 座標とする。これに対して，負荷(load)を原点とし，電源に向かう方向を正とする y 座標を考える。線路の長さを l とすれば $z+y=l$ という関係にあるから，$V(y)$，$I(y)$ は次のようになる。

$$V(y)=V_ie^{\gamma y}+V_re^{-\gamma y} \tag{2.11.a}$$

$$I(y)=\frac{1}{Z_c}\left(V_ie^{\gamma y}-V_re^{-\gamma y}\right)=I_ie^{\gamma y}+I_re^{-\gamma y} \tag{2.11.b}$$

ここで，$e^{\gamma y}$ は y の負方向に向かう波動，すなわち**負荷に対する入射波**(incident wave)を表し，$e^{-\gamma y}$ は y の正方向に向かう波動，すなわち**負荷からの反射波**(reflected wave)を表す。また，それぞれの波動の振る舞いを考えると，次のようになる。

- $e^{\gamma y}=e^{\alpha y}e^{j\beta y}$：$e^{\alpha y}$ は y の負方向に沿って減衰することを表し，$e^{j\beta y}$ は $\beta y=2\pi$ を 1 周期として振動することを表す。
- $e^{-\gamma y}=e^{-\alpha y}e^{-j\beta y}$：$e^{-\alpha y}$ は y の正方向に沿って減衰することを表し，$e^{-j\beta y}$ は $\beta y=2\pi$ を 1 周期として振動することを表す。

$\beta y=2\pi$ が 1 周期であるから，**波長** λ（wavelength)は次の式で位相定数 β と関係付けられる。

$$\beta\lambda=2\pi \tag{2.12}$$

また，$y=0$（負荷端）において，次の関係が成り立つ。

$$V(0)=V_i+V_r$$

$$I(0)=\frac{1}{Z_c}\left(V_i-V_r\right)=I_i+I_r$$

$$Z_L=\frac{V(0)}{I(0)} \tag{2.13}$$

したがって負荷端における電圧**反射係数**(voltage reflection coefficient)は，次の式で与えられる。

$$\frac{V_r}{V_i} = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = S_v(0) \tag{2.14}$$

同じように計算すると，電流反射係数は$S_I(0) = -S_V(0)$となる。

ここで、次のことがわかる。

・**無反射**になる条件は，$Z_L = Z_c$である。このような負荷を**整合負荷**(matched load)と呼ぶ。

・負荷端から距離yの位置にある任意の点yにおいて，入射電圧$V_i e^{\gamma y}$と反射電圧$V_r e^{-\gamma y}$の比を考えると，この点における(電圧)反射係数は次の式で与えられる。

$$S(y) = \frac{V_r e^{-\gamma y}}{V_i e^{\gamma y}} = S(0) e^{-2\gamma y} \tag{2.15}$$

・この点において電圧$V(y)$と電流$I(y)$の比をとり，負荷を見込むインピーダンス$Z(y)$を定義する。

$$Z(y) = Z_c \frac{1 + S(y)}{1 - S(y)} = Z_c \frac{Z_L + Z_c \tanh \gamma y}{Z_c + Z_L \tanh \gamma y} \tag{2.16}$$

特に**無損失伝送線路**(loss-less transmission line)の場合，$\tanh \gamma y = j \tan \beta y$となるので，負荷を見込むインピーダンスは次のように表される。

$$Z(y) = R_c \frac{Z_L + jR_c \tan \beta y}{R_c + jZ_L \tan \beta y} \tag{2.17}$$

また，線路の特性インピーダンスで**規格化**(normalize)すれば，負荷インピーダンスz_L，負荷端における反射係数$S(0)$，負荷を見込むインピーダンス$z(y)$は，それぞれ次のように表される。

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_c} \tag{2.18.a}$$

$$S(0) = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} \tag{2.18.b}$$

$$z(y) = \frac{z_L + \tanh \gamma y}{1 + z_L \tanh \gamma y} \tag{2.18.c}$$

2.3 定在波分布

無損失伝送線路で考える。伝送線路上の位置yにおける電圧，電流は，それぞれ次の式で表される。

$$V(y) = V_i e^{j\beta y}\left(1 + S(0) e^{-j2\beta y}\right) \tag{2.19.a}$$

$$I(y) = \frac{V_i e^{j\beta y}}{R_c}\left(1 - S(0) e^{-j2\beta y}\right) \tag{2.19.b}$$

ここで，次のことがわかる。

(a) $S(0)$は負荷インピーダンスと線路の特性インピーダンスで決まる。

(b) 複素平面上で，$-S(0)$は$S(0)$を原点中心に180°回転した位置にある。

(c) $S(0)e^{-j2\beta y}$は，複素平面上で$S(0)$を原点中心に角度$-2\beta y$だけ回転させた位置にある。

(d) 点(−1,0)と$S(0)e^{-j2\beta y}$，$-S(0)e^{-j2\beta y}$を結ぶベクトル$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$がそれぞれ電圧, 電流に対応する。

$$A = S(0)e^{-j2\beta y} - (-1) = 1 + S(0)e^{-j2\beta y} \tag{2.20.a}$$

$$B = 1 - S(0)e^{-j2\beta y} \tag{2.20.b}$$

(e) 位置yが変化すると，$\pm S(0)e^{-j2\beta y}$は半径$|S(0)|$の円に沿って，円周上を移動する。
例えば，$S(0)e^{-j2\beta y}$が実軸上正の位置にあるとき，$-S(0)e^{-j2\beta y}$は負の実軸上($|\boldsymbol{A}|$は最大で$|\boldsymbol{B}|$は最小)にある。
また，$Z_{in} = V/I$は位置によって, **周期**(period) $2\beta y = 2\pi$（$y = \pi/\beta = \lambda/2$)で変化し，$V(y)$，$I(y)$は定在波(standing wave)となる。

(f) 次のように定在波分布の極大，極小の比（**定在波比**(standing wave ratio)）を考える。

$$\rho = \frac{|V(y)|_{\max}}{|V(y)|_{\min}} = \frac{1+|S(0)|}{1-|S(0)|} \tag{2.21}$$

・$|V(y)|$が最大のとき，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ともに実軸上に位置する。

→ $\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$のなす角度（電圧と電流の位相差）が0となる。

→ この位置yから負荷側を見込む入力インピーダンスは純抵抗となる。

$$Z_{in} = R_{\max} = \frac{|V|_{\max}}{|I|_{\min}} = R_c \frac{1+|S(0)|}{1-|S(0)|} = R_c \rho \tag{2.22}$$

・$|V(y)|$が最小のとき，同様に入力インピーダンスは次式で与えられる。

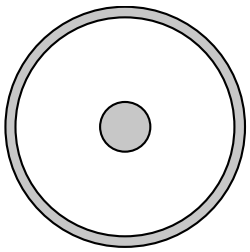
$$Z_{in} = R_{\min} = \frac{|V|_{\min}}{|I|_{\max}} = R_c \frac{1}{\rho} \tag{2.23}$$

(g) 特別な場合として：

(i) $Z_L = 0$（**終端短絡**(short terminated)）の場合，$S(0) = -1$であり，$\lambda/2$周期で$V = 0$，$I \neq 0$（$Z_{in} = 0$)となる。また, この点から$\lambda/4$だけ離れた点では, $V \neq 0$, $I = 0$であるから$Z_{in} = \infty$，すなわち開放(open)となる。

(ii) $Z_L = \infty$（**終端開放**(open terminated)）の場合，$S(0) = 1$であり，$\lambda/2$周期で$V \neq 0$，$I = 0$（$Z_{in} = \infty$)となる。また，この点から$\lambda/4$だけ離れた点では，$Z_{in} = 0$，すなわち短絡(short)となる。

2.4 同軸線路



外直径(outer radius)が $2a$ の導体と内直径(inner radius)が $2b$ の 2 つの導体が同軸状(coaxial)に配置された伝送線路を**同軸線路**(coaxial line)という。

この線路を伝搬する電磁界は，時間変化があるにもかかわらず，TEM モード(Transverse Electromagnetic mode)で伝搬する場合，次のようにして静電界(static electric field)で考えることができる。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t(x,y)e^{-\gamma z} \tag{2.24.a}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_t(x,y)e^{-\gamma z} \tag{2.24.b}$$

$$\nabla = \nabla_t + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} = \nabla_t - \gamma\mathbf{k} \tag{2.25}$$

マクスウェルの方程式 $\nabla\times\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$ より，

$$(\nabla_t - \gamma\mathbf{k})\times\mathbf{E}_t e^{-\gamma z} = -j\omega\mu\mathbf{H}_t e^{-\gamma z} \quad \text{(t 成分のみ)} \tag{2.26}$$

したがって，

$$\nabla_t\times\mathbf{E}_t = 0 \tag{2.27.a}$$

$$-\gamma\mathbf{k}\times\mathbf{E}_t = -j\omega\mu\mathbf{H}_t \tag{2.27.b}$$

同様に，$\nabla\times\mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}$ より，

$$\nabla_t\times\mathbf{H}_t = 0 \tag{2.28.a}$$

$$-\gamma\mathbf{k}\times\mathbf{H}_t = j\omega\varepsilon\mathbf{E}_t \tag{2.28.b}$$

以上より，次のように伝搬定数 γ が決定される。

$$-\gamma\mathbf{k}\times(\gamma\mathbf{k}\times\mathbf{E}_t) = -\omega^2\varepsilon\mu\mathbf{E}_t \tag{2.29}$$

$$\therefore \gamma^2 = -\omega^2\varepsilon\mu$$

【重要】<u>この関係式は, TEM モードが伝搬すれば導体の形状には無関係に成り立つことに注意。</u>

特性インピーダンスを求めるには，$\mathbf{E}_t$，$\mathbf{H}_t$ を知る必要がある。$\nabla_t\times\mathbf{E}_t = 0$ から，$\mathbf{E}_t$ はスカラー関数 ϕ_e を用いて次のように表される。

$$\mathbf{E}_t = -\nabla_t\phi_e \tag{2.30}$$

このとき，$div\mathbf{E} = 0$ より $\nabla_t^2\phi_e = 0$ が成り立つ。すなわち，ϕ_e は二次元静電ポテンシャルと同じ方程式の解である。

また，式(2.27.b)から，$\mathbf{H}_t$ と $\mathbf{E}_t$ の間には次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{H}_t = \frac{\gamma\mathbf{k}\times\mathbf{E}_t}{j\omega\mu} \tag{2.31}$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
div\mathbf{H} = div\mathbf{H}_t &= \nabla_t \cdot \left(\frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_t \right) \\
&= \frac{\gamma}{j\omega\omega} \left(\mathbf{E}_t \cdot \nabla_t \times \mathbf{k} - \mathbf{k} \cdot \nabla_t \times \mathbf{E}_t \right) \\
&= \frac{-\gamma}{j\omega\omega} \mathbf{k} \cdot \nabla_t \times \mathbf{E}_t = 0 \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

であるから，$div\mathbf{H} = 0$ も満足する。

したがって，$\nabla_t^2 \phi_e = 0$ なる静電モデルから $\mathbf{E}_t$ 及び $\mathbf{H}_t$ が求められる。

→静電モデルでは，導体の形状によって電磁界 $\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$ が定まる。

→これによって，C 及び L が定まり，特性インピーダンスが求まる。

例として，内導体の外直径が $2a$，外導体の内直径が $2b$ なる同軸線路の特性インピーダンスを求める。ただし，導体間の媒質の誘電率(permittivity)，透磁率(permeability)は，それぞれ ε，μ とする。

軸対称性を考慮して，内導体に z 方向単位長さあたり $q[C/m]$ の一様電荷分布を考える。このとき，内外導体間に作られる電界は次のように求まる（静電界のガウスの法則(Gauss' law)）。

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon \int_0^{2\pi} E_r r d\theta \times l = q \times l \\
&2\pi\varepsilon r E_r = q \\
&E_r = \frac{q}{2\pi\varepsilon r} \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

これから内外導体間の電位差を求めると，次のようになる。

$$
V = \int_a^b E_r dr = \int_a^b \frac{q}{2\pi\varepsilon r} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b}{a} \qquad (2.34)
$$

したがって，単位長さあたりの静電容量 C は次のように定まる。

$$
C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{b}{a}} \qquad (2.35)
$$

また，内導体に z 方向に流れる電流 I を考えると，この周りにできる磁界の大きさは次のように求まる。

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} H_\theta r d\theta = I \\
&H_\theta = \frac{I}{2\pi r} \qquad (2.36)
\end{aligned}
$$

この磁界によって内外導体間に蓄えられる磁気エネルギーは，次のように計算される。

$$
W_m = \frac{1}{2} \int_a^b \mu H_\theta{}^2 2\pi r dr = \frac{\mu I^2}{4\pi} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \qquad (2.37)
$$

したがって，次の関係式から単位長さ当たりのインダクタンス(inductance)が求まる。

$$
W_m = \frac{1}{2} L I^2
$$

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \tag{2.38}$$

式(2.35)，(2.38)から，同軸線路の特性インピーダンスは次のように求まる。

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}}{\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\frac{b}{a} \tag{2.39}$$

[付録 A]　スミスチャート

図表を使って Z_L から直接 $Z(y)$ を求める。

(1) Z と S の対応

$$S = \frac{z-1}{z+1} = \frac{(r-1)+jx}{(r+1)+jx} = U + jV \tag{A.1}$$

(i) x を消去すると，r =一定の軌跡として次式が得られる。

$$\left(U - \frac{r}{r+1}\right)^2 + V^2 = \left(\frac{1}{r+1}\right)^2 \tag{A.2}$$

これは，点(1,0)を通り，中心 $(r/(r+1),\ 0)$，半径 $1/(r+1)$ の円群を表す。

(ii) r を消去すると，x =一定の軌跡(locus)として次式が得られる。

$$(U-1)^2 + \left(V - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \tag{A.3}$$

これは，点(1,0)を通り，中心 $(1,\ 1/x)$，半径 $1/x$ の円（但し $0 \le r$ ）を表す。

以上の(i)及び(ii)を同一平面 U-V 上に描く（スミスチャート(smith chart)）。

→ $r + jx$ と $S = U + jV$ は一対一に対応。

(2) 観測点における反射係数 $S(0)e^{-j2\beta y}$

$r + jx$ で決まる点 $S(0)$ を，原点を中心に半径 $|S(0)|$ の円に沿って $-2\beta y = -2\pi(2y/\lambda)$ だけ回転させる。回転させた点の $r' + jx'$ を読み取れば，その点から負荷を見込む規格化入力インピーダンス(normalized input impedance)が求まる。