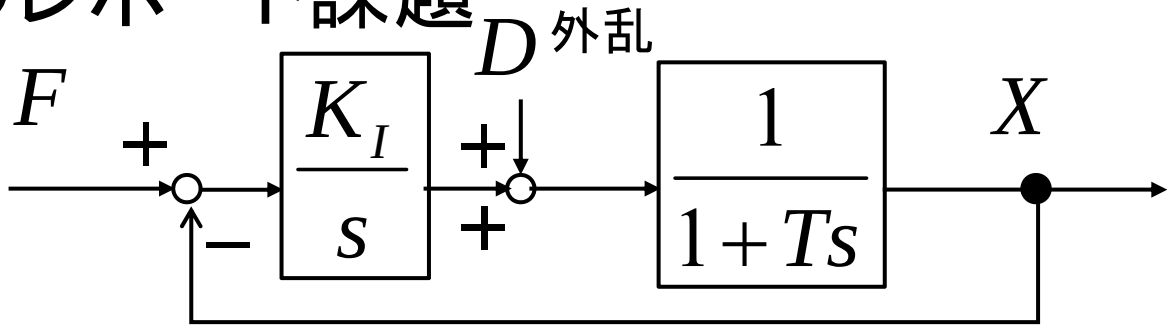
2016年度　第2Q　　2016年8月3日

フーリエ変換とラプラス変換

第15回講義資料

担当: 角嶋邦之
kakushima.k.aa@m.titech.ac.jp
工学院電気電子系

7/29の講義のレポート課題



$$X = \frac{1}{1+Ts}\left\{\frac{K_I}{s}\left(F - X\right) + D\right\}$$ をまとめると

$$X = \frac{K_I}{Ts^2 + s + K_I}F + \frac{s}{Ts^2 + s + K_I}D$$

$$E = F - X = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + K_I}F + \frac{-s}{Ts^2 + s + K_I}D$$

$f(t)$の入力に対する定常、速度誤差

ステップ入力

$$e_s = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + K} \cdot \frac{1}{s} = 0$$

ランプ入力

$$e_v = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + K_I} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{K_I}$$

$d(t)$の入力に対する定常、速度誤差

ステップ入力

$$e_s = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{-s}{Ts^2 + s + K_I} \cdot \frac{1}{s} = 0$$

ランプ入力

$$e_v = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{-s}{Ts^2 + s + K_I} \cdot \frac{1}{s^2} = -\frac{1}{K_I}$$

講義予定(全16回)

第1回	6/15	線形システムとは，周期関数の級数展開
第2回	6/17	フーリエ級数の性質
第3回	6/22	線形回路の周期波に対する定常応答
第4回	6/24	フーリエ級数の理解度確認総合演習と解説
第5回	6/29	非周期関数とフーリエ積分・フーリエ変換
第6回	7/1	フーリエ変換の存在と性質
第7回	7/6	時間領域表示と周波数領域表示，線形回路の時間応答と周波数応答
第8回	7/8	理解度の確認と解説

第9回	7/13	シャノンの標本化定理
第10回	7/15	離散フーリエ変換の基礎（定義，性質）
第11回	7/20	離散フーリエ変換の実際（帯域制限，窓関数，高速フーリエ変換，応用例）
第12回	7/22	0～∞上の関数とラプラス変換，ラプラス変換の性質
第13回	7/27	ラプラス逆変換，部分分数展開
第14回	7/29	線形回路の過渡応答，システムの安定性
第15回	8/3	ラプラス変換の電気電子システムへの応用，（z変換：追加分）
第16回	8/5	期末試験

離散時間信号のラプラス変換とz変換

離散時間信号$x_s(t)$ は単位インパルス列$\delta_T(t)$で表現できる($t \geqq 0$)

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t)\delta(T) + x(t)\delta(t-T) + x(t)\delta(t-2T) + \cdots$$

ラプラス変換をすると

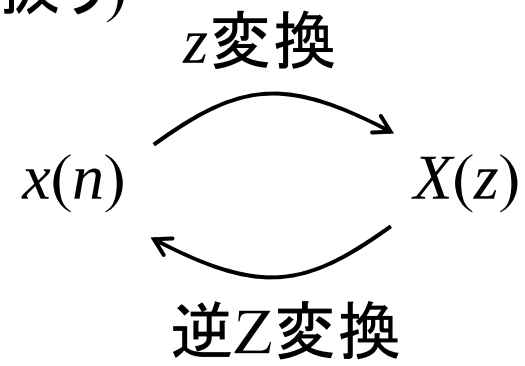
$$X_s(s) = \int_0^\infty \{x(t)\delta(T) + x(t)\delta(t-T) + x(t)\delta(t-2T) + \cdots\} e^{-st} dt$$

$$= x(0) + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nTs}$$

複素関数 z を $z = e^{sT}$ と定義し、サンプリング時間T

でなく、単位サンプリング時刻とする(数列として扱う)

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$



代表的なz変換と変換表

■ 単位インパルス のz変換

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=\delta(0)z^{-1}=1$$

■ 単位ステップ数列 のz変換

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u(n)z^{-n}=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}}_{\text{等比数列}}=\frac{1}{1-z^{-1}},\quad (|z|>1)$$

■ $x(n)=a^n u(n)$ のz変換

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-az^{-1}},\quad (|z|>|a|)$$

■ $x(n)=e^{-anT}u(n)$ のz変換

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-anT}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-aT}z^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

(a が実数の時、$|z|>e^{-aT}$)
(a が虚数の時、$|z|>1$)

代表的な数列のz変換対

$x(n)$	$X(z)$	収束領域
$\delta(n)$	1	全平面
$\delta(n-m)$	z^{-m}	$z\neq 0$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$\sin(n\omega T)u(n)$	$\frac{\sin\omega Tz^{-1}}{1-2\cos\omega Tz^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
$\cos(n\omega T)u(n)$	$\frac{1-\cos\omega Tz^{-1}}{1-2\cos\omega Tz^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
$n\alpha^{n-1}u(n)$	$\frac{z}{(z-\alpha)^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$

z変換の性質と差分方程式($x(n)$の数列、但し、$n<0$では、$x(n)=0$とする)

線形性

$$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \Leftrightarrow a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$$

推移定理

$$x(n-m) \Leftrightarrow z^{-m} X(z)$$

(証明)

$$\mathcal{Z}\{x(n-m)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m) z^{-n}$$

$$= z^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m) z^{-(n-m)}$$

($n-m=k$とおく)

$$= z^{-m} \sum_{k=-m}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

$$= z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = z^{-m} X(z)$$

z^{-1}は単位時間
遅延演算子

指数数列の積

$$e^{-anT} x(n) \Leftrightarrow X(e^{aT} z)$$

畳み込みの定理

$$\mathcal{Z}^{-1}(X_1 X_2) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k) x_1(n-k)$$

数列の例

$x(n) = \{1, 1, 0, -2\}$

z変換 $\rightarrow X(z) = 1 + 1 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} - 2 \cdot z^{-3}$

差分方程式

伝達関数 $H(z) = \dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$

$$Y(z) = H(z) X(z), \quad Y(z) = \alpha z^{-1} Y(z) + X(z)$$

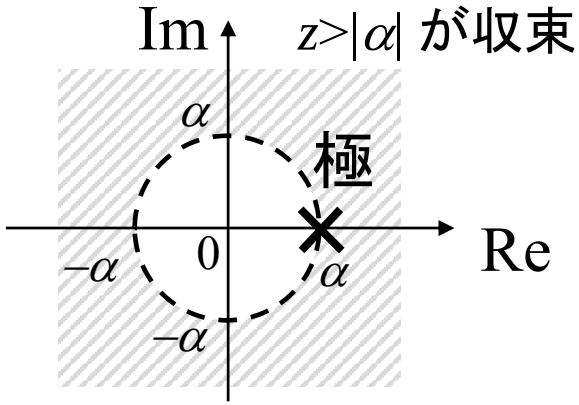
時間領域で表現すると差分方程式

$$y[n] = \alpha y[n-1] + x[n]$$

$\alpha>1$なら発散、$\alpha<1$なら減衰

$z=\alpha$を極と呼ぶ

$z>|\alpha|$ が収束条件



逆z変換の導出方法 (2種類の方法)

$$X(z)=\frac{z}{3z^2-4z+1}$$ の逆z変換を求める

部分分数展開による算出

$$X(z)=\frac{z}{3(z-1)\left(z-1/3\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right)$$

$$\therefore x(n)=\frac{1}{2}\left(1-3^{-n}\right) \quad (n\geq 0)$$

$x(0) = 0$
$x(1) = 1/3$
$x(2) = 4/9$
$x(3) = 13/27$
$x(4) = 40/81$
…

べき級数展開による算出

$$\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{3}z^{-1}+\frac{4}{9}z^{-2}+\frac{13}{27}z^{-3}+\frac{40}{81}z^{-4} \\
\hline
3z^2-4z+1 & z \\
 & z-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}z^{-1} \\
\hline
 & \frac{4}{3}-\frac{1}{3}z^{-1} \\
 & \frac{4}{3}-\frac{16}{9}z^{-1}+\frac{4}{9}z^{-2} \\
\hline
 & \frac{13}{9}z^{-1}-\frac{4}{9}z^{-2} \\
 & \frac{13}{9}z^{-1}-\frac{52}{27}z^{-2}+\frac{13}{27}z^{-3} \\
\hline
 & \frac{40}{27}z^{-2}-\frac{13}{27}z^{-3} \\
 & \frac{40}{27}z^{-2}-\frac{160}{81}z^{-3}+\frac{40}{81}z^{-4} \\
\hline
 & \cdots
\end{array}$$

$x(0) = 0$
$x(1) = 1/3$
$x(2) = 4/9$
$x(3) = 13/27$
$x(4) = 40/81$
…

z変換の利用 (差分方程式、積分/微分)

2階の差分方程式の一般解

$$a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$$

特性方程式 $x^2-4x+4=0$

特性方程式の解 $x=2$ (重解)

平行移動

$$x_0=0,\ x_1=1,\ x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=0$$

z変換

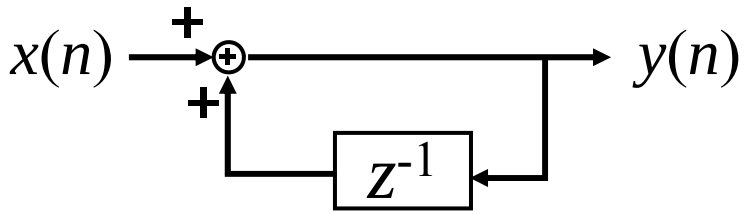
$$z^2X(z)-z-4zX(z)+4X(z)=0$$

$$X(z)=\frac{z}{(z-2)^2}$$

逆z変換　$x_n=n\cdot 2^{n-1}$

よって　$a_n=x_{n-1}=(n-1)\cdot 2^{n-2}$

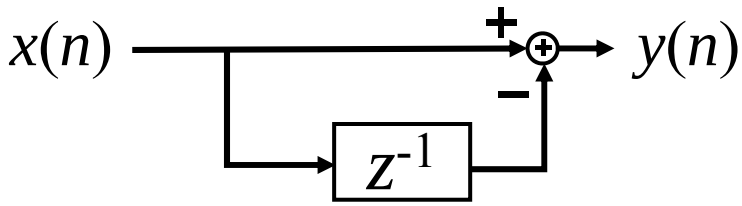
積分　(厳密には累積)



$$Y(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$$

$$y(n)=x(n)+y(n-1)$$

微分　(厳密には差分)



$$Y(z)=\left(1-z^{-1}\right)X(z)$$

$$y(n)=x(n)-x(n-1)$$

デジタルフィルタの設計などに用いる

離散時間信号に関する出題

$T=1/(2f_M)$ で抽出した帯域制限信号 $f(t)$ の信号は下記の式で表すことを示す。但し、$\omega_M=2\pi f_M$ とする。空欄を埋めよ。

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\frac{\sin\omega_M(t-nT)}{\omega_M(t-nT)}$$

$f(t)$のフーリエ変換は複素フーリエ級数を用いて $F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inT\omega}$ となる。

但し、$c_n=\dfrac{\pi}{\omega_M}f(-nT)$ である。この式を逆フーリエ変換すると、

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_M}^{\omega_M}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{\omega_M}f(-nT)e^{inT\omega}\right\}e^{i\omega t}d\omega$$ となる。

積分の順序と和を入れ替えると

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{f(-nT)\int_{-\omega_M}^{\omega_M}\frac{1}{2\omega_M}e^{i\omega(t+nT)}d\omega\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(-nT)\frac{\sin\omega_M(t+nT)}{\omega_M(t+nT)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\frac{\sin\omega_M(t-nT)}{\omega_M(t-nT)}$$

離散フーリエ変換に関する出題

ある波 $x(t)$ を[0, 1]の区間でサンプリングしたところ、{1, 1, -1, -1} のデータを得た。離散フーリエ変換を用いて、$x(t)$ を求めることとする。

まず、離散フーリエ変換は $X(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{n-1}x(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$ であるから、

データの離散フーリエ変換は

$$X(0)=1/4\{x(0)+x(1)+x(2)+x(3)\}=0$$

$$X(1)=1/4\left\{x(0)+x(1)e^{-\frac{2\pi}{4}i}+x(2)e^{-\frac{4\pi}{4}i}+x(3)e^{-\frac{6\pi}{4}i}\right\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$X(2)=1/4\left\{x(0)+x(1)e^{-\frac{4\pi}{4}i}+x(2)e^{-\frac{8\pi}{4}i}+x(3)e^{-\frac{12\pi}{4}i}\right\}=0$$

$$X(3)=1/4\left\{x(0)+x(1)e^{-\frac{6\pi}{4}i}+x(2)e^{-\frac{12\pi}{4}i}+x(3)e^{-\frac{18\pi}{4}i}\right\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

ここで、k=1 はf = 1Hz, k=3はf = –1Hzに対応するため、cos(2πt)およびsin(2πt)で表現できることがわかる。

よって　$x(t) = \cos(2\pi t)+\sin(2\pi t)$

ラプラス変換に関する出題

次の関数のラプラス変換を求めよ。

(1) $f(t) = e^{2t} + t + 2$

$$F(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}$$

(2) $f(t) = \cos 3t + \cosh 3t$

$$F(s) = \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-3} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+3}$$

$$= \frac{2s^3}{s^4-81}$$

(3) $f(t) = \dfrac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$

$$F(s) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right)$$

$$= \frac{1}{(s-a)(s-b)}$$

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s)=\mathcal{L}(f(t))$
1	$\frac{1}{s}$ $(s>0)$
t $(t>0)$	$\frac{1}{s^2}$ $(s>0)$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ nは自然数 $(t>0)$	$\frac{1}{s^n}$ $(s>0)$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ $(t>0)$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$ $(s>0)$
$e^{\lambda t}$ $(t \geqq 0)$	$\frac{1}{s-\lambda}$ $(s>\lambda)$
$\cos\lambda t$ $(t \geqq 0)$	$\frac{s}{s^2+\lambda^2}$ $(s>0)$
$\sin\lambda t$ $(t \geqq 0)$	$\frac{\lambda}{s^2+\lambda^2}$ $(s>0)$

ラプラス逆変換の出題

次の像方程式のラプラス逆変換を求めよ。

(1) $$F(s)=\frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

$$=\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s+1} \qquad f(t)=2e^{-2t}-e^{-t}$$

(2) $$F(s)=\frac{1}{s^2\left(s^2+\lambda^2\right)}$$

$$f(t)=t*\frac{\sin\lambda t}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\int_0^t (t-\tau)\sin\lambda\tau d\tau$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\left(t-\frac{1}{\lambda}\sin\lambda t\right)$$

$f(t), g(t)$	$F(s), G(s)$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
$f(at)$	$(1/a)F(s/a)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$df(t)/dt$	$sF(s)-f(0)$
$-tf(t)$	$dF(s)/ds$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)\cdot G(s)$

ラプラス変換を用いた微分方程式の出題

次の微分方程式のラプラス変換を使って求めよ。

(1) $x''+4x'+3x=0, x(0)=0, x'(0)=2$

$$\left(s^2+4s+3\right)X=2,\ X=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3},\quad x(t)=e^{-t}-e^{-3t}$$

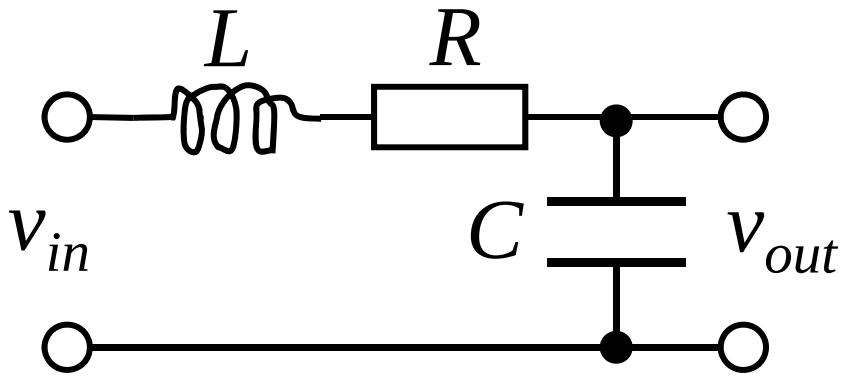
(2) $x''+4x'+3x=e^{-2t}, x(0)=0, x'(0)=3$

$$\left(s^2+4s+3\right)X=3+\frac{1}{s+2},\quad X=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}$$

$$x(t)=2e^{-t}-e^{-2t}-e^{-3t}$$

電気回路に関する出題

下記の電気回路の伝達関数を求めよ。



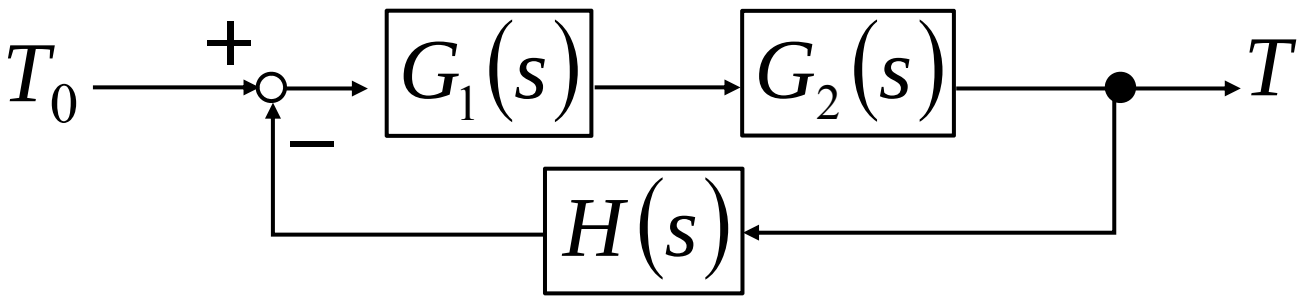
微分方程式

$$LC\frac{d^2 v_{out}}{dt^2} + RC\frac{dv_{out}}{dt} + v_{out} = v_{in}$$

伝達関数$W(s)$ $$W(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

ブロック線図に関する出題

以下のフィードバック制御系の伝達関数を求めよ



$$T(s) = G_2(s)G_1(s)\{T_0 - H(s)T\}$$ より

$$\frac{T}{T_0} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

8/3の講義のレポート課題

$X(z)=\dfrac{4z^2-z}{2z^2-2z+1}$ をべき級数展開法を用いて逆z変換$x(n)$を求めよ。

但し、n=3までで良い。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2+1.5z^{-1}+0.5z^{-2}-0.25z^{-3}\cdots \\
\hline
2z^2-2z+1 & 4z^2-z \\
 & 4z^2-4z+2 \\
\hline
 & 3z-2 \\
 & 3z-3+1.5z^{-1} \\
\hline
 & 1-1.5z^{-1} \\
 & 1-z^{-1}+0.5z^{-2} \\
\hline
 & -0.5z^{-1}-0.5z^{-2} \\
 & -0.5z^{-1}+0.5z^{-2}-0.25z^{-3} \\
\hline
 & \cdots
\end{array}
$$

$x(0)=2$

$x(1)=1.5$

$x(2)=0.5$

$x(3)=-0.25$