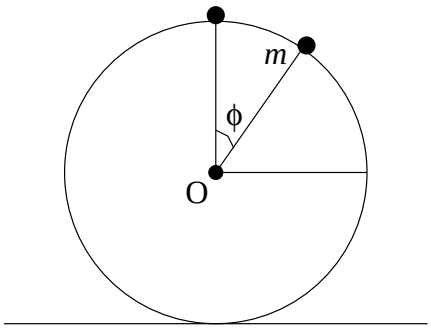
物理学演習第一 d クラス No.3

2016.5.17(Tue.)
2016.5.24(Tue.)

【1】《球面上の束縛運動》



水平面上に固定されている半径 a の滑らかな球の頂点に質点 m をおき，水平方向に初速 v_0 を与えた．重力加速度を g として, 以下の問に答えよ.

(i) m が球面に接している間の運動を考える．質点の球面上での位置を図のように角度 $\phi(t)$ で表すことにして, 質点の運動方程式を半径方向と角度方向に分けて記せ.

(ii) 角度方向の運動方程式の両辺に $\dot{\phi}$ を掛けて積分せよ.

(iii) 質点が球面から離れるときの角座標 $\phi = \phi_0$ が満たすべき関係式を求めよ．ただし, 初速 v_0 は十分小さいものとする.

(iv) 前問で, ϕ_0 が解をもつような v_0 の範囲を求めよ．v_0 がこの範囲にないとき, 質点はどのような運動をするか.

【2】《偏微分》

以下の関数を x, y, z について偏微分せよ.

(i) $U(x,\, y,\, z) = 3x^2yz^3 + 2xy$.

(ii) $U(x,\, y,\, z) = e^{ax}\,[\sin(ky) + \cos(kz)]$.

(iii) $U(x,\, y,\, z) = -\dfrac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

【3】《線積分》

2 次元平面において, 質点が力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (x, y)$ を受けて, 点 (0, 0) から (1, 1) まで運動する．このとき, 次の 2 つの経路

C_1：直線 $y = x$

C_2：放物線 $y = x^2$

に沿って運動した場合に, 力 $\boldsymbol{F}$ がする仕事

$$W_1 = \int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}, \qquad W_2 = \int_{C_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{1}$$

を計算したい．$d\boldsymbol{r}$ の意味は $d\boldsymbol{r} = (dx, dy)$ である (つまり，接線方向の微小ベクトル)．これらは, 経路 C_1 と C_2 に沿った線積分である.

2 次元平面上の話だが, 積分は線に沿って行われるので本質的に 1 次元の積分である．このような場合派, 媒介変数 t を用いて座標を $(x(t),\, y(t))$ と表し,

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = F_x dx + F_y dy = \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt}\right) dt \tag{2}$$

と書き換えて, 線積分を t についての通常の積分に変えるのが簡単である.
(i) 媒介変数を用いて経路 C_1 を表し, 仕事 W_1 を求めよ.
(ii) 経路 C_2 についても同様にして, 仕事 W_2 を求めよ.
(iii) 2 通りの経路で仕事が等しいことがわかった. 力 $\boldsymbol{F}$ が保存力の場合, ポテンシアル $U(x, y)$ が存在し, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y})$ と書けるはずである. $\frac{\partial U}{\partial x}$ を x について積分すれば $U(x, y)$ が得られることをヒントに, 力 $\boldsymbol{F}$ に対するポテンシアル $U(x, y)$ を求めよ. それを偏微分して, 確かに $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (x, y)$ になっていることを確認せよ.
(iv) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の代わりに $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = (y, 0)$ という力を受けて運動する場合, 2 つの経路 $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ に沿って, 力 $\boldsymbol{G}$ がする仕事

$$W_1' = \int_{C_1} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad W_2' = \int_{C_2} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{3}$$

を求めよ.
(v) 経路により仕事が違っていたということは, 力 $\boldsymbol{G}$ は保存力ではあり得ず, ポテンシアルは存在しないはずである. 仮に, 力 $\boldsymbol{G}$ に対するポテンシアルが $U_G(x, y)$ であったとして, (iii) と同様に U_G を求めようとすると, 途中で矛盾してしまうことを示せ.

【4】《単振り子の最大振れ角と周期》
長さ l の糸 (質量は無視する) の一端に質点 m を結びつけた系の運動方程式は，振れ角 θ を用いて

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{1}$$

と表されることはたいていのテキスト (大学理工系 1 年次の力学のテキスト) に書かれている.
振れ角が小さい場合には (1) の右辺で $\sin\theta \simeq \theta$ と近似して振り子の等時性 (周期が最大振れ角 θ_0 によらず $T = 2\pi\sqrt{l/g}$) が出てくることもたいていのテキストに載っている．では，振れ角が大きくなると振り子の周期は増加するのだろうか，減少するのだろうか，物理的考察をおこなえ．また，周期を最大振れ角 θ_0 の関数として $T(\theta_0)$ と書き，$T(\theta_0)$ が θ_0 に関して

$$T(\theta_0) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + A_1\theta_0 + A_2\theta_0^2 + \cdots\right) \tag{2}$$

と Taylor 展開できるとするとき，A_1，A_2 に関してどういうことが予想されるか.
(※) 難しい計算の末の厳密な式を要求しているのではない．むしろ，何も計算せずに物理的考察からどこまでわかるかと問うているのである.