同次連立一次方程式と列ベクトルの一次独立, 従属性

ここでは行列を列ベクトルに分割して考え, $A=[\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]$ とする. このとき $\boldsymbol{x}={}^t[x_1\,x_2\,\cdots\,x_n]$ に対し,

$$A\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{a}_1\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{a}_1x_1+\cdots+\boldsymbol{a}_nx_n.$$

同次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は常に解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ をもつ. この解を $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の **自明な解** という.

一般にベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ (平面・空間のベクトルの組でもよい) について,

$$t_1\boldsymbol{a}_1+t_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{a}_n,\quad (=)\ \boldsymbol{a}_1t_1+\boldsymbol{a}_2t_2+\cdots+\boldsymbol{a}_nt_n\qquad (t_1,t_2,\ldots,t_n\ \text{はスカラー})\tag{1}$$

の形のベクトルを $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ の **一次結合**, または **線形結合** といい,

$$\boldsymbol{b}=t_1\boldsymbol{a}_1+t_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{a}_n,\qquad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1t_1+\boldsymbol{a}_2t_2+\cdots+\boldsymbol{a}_nt_n\tag{2}$$

のとき, $\boldsymbol{b}$ は $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ の一次結合で表せる, 又は一次結合であるという. また, 式

$$t_1\boldsymbol{a}_1+t_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{a}_1t_1+\boldsymbol{a}_2t_2+\cdots+\boldsymbol{a}_nt_n=\boldsymbol{0}\tag{3}$$

を **一次関係式**, または **線形関係式** といい, これが成り立つのが $t_1{=}t_2{=}\cdots{=}t_n{=}0$, 即ち $\boldsymbol{t}={}^t[t_1\,t_2\,\cdots\,t_n]=\boldsymbol{0}$ の場合に限るとき, ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ は **一次独立**, または**線形独立**であるという. 即ち,

$$\boldsymbol{a}_1t_1+\boldsymbol{a}_2t_2+\cdots+\boldsymbol{a}_nt_n=\boldsymbol{0}\implies \boldsymbol{t}={}^t[t_1\,t_2\,\cdots\,t_n]=\boldsymbol{0}$$

が成り立つとき $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ は一次独立 (線形独立) である.
$\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ は一次独立でないとき **一次従属**, または**線形従属**であるという. これは (3) 式をみたす $\boldsymbol{t}$ で $\boldsymbol{t}\neq\boldsymbol{0}$ である ($\Leftrightarrow t_1,t_2,\ldots,t_n$ のうち, 少なくとも 1 つは 0 でない) ものが存在する場合である. (ここでは「一次」と「線型」は同義語で, 英語では共に linear. 他の用語についても両方の呼び方がある. 例えば一次方程式は線型方程式ともいう.)

m 次元列ベクトルの n 個の組 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ に対し, $A=[\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]$ ($m{\times}n$ 行列) とおくと, (1, 2, 3) 式は

$$(1)\quad \boldsymbol{a}_1t_1+\boldsymbol{a}_2t_2+\cdots+\boldsymbol{a}_nt_n=A\boldsymbol{t},\qquad (2)\ A\boldsymbol{t}=\boldsymbol{b},\qquad (3)\ A\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}$$

と表せ, (2,3) では $\boldsymbol{t}$ は方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ や $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解になる.
(3) が自明な解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}$ のみをもつ $\Leftrightarrow$ $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ が一次独立, なので前定理より次を得る：

定理 (A) (一次独立性と同次連立一次方程式) m 次元列ベクトルの n 個の組 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ に対し $A=[\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]$ ($m{\times}n$ 行列) とおくとき,
(1) $\boldsymbol{b}$ が $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ の一次結合で表せる. $\Leftrightarrow A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもつ. $\Leftrightarrow \operatorname{rank}[A,\boldsymbol{b}]=\operatorname{rank}A$.
(2) $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ が一次独立. $\Leftrightarrow A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は自明な解しかもたない. $\Leftrightarrow \operatorname{rank}A=n$.
(3) $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ が一次従属. $\Leftrightarrow A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は自明でない解をもつ. $\Leftrightarrow \operatorname{rank}A<n$.

注意 1 記号 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ は順序を問題にしないベクトルの組を表す. ($\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}=\{\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$.) 一次結合の式や一次関係式においてはベクトルの並び順は問題にならないからである. これとは逆に, 列分割された行列は順序付けられたベクトルの組とみなされる. 尚, { } や [ ] を略して $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ とも表す.

例 1 (基本ベクトルの組) n 次元の基本ベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ については $[\boldsymbol{e}_1\,\cdots\,\boldsymbol{e}_n]=E_n$ より $\boldsymbol{e}_1t_1+\cdots+\boldsymbol{e}_nt_n=E_n\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}$. 即ち, $\boldsymbol{b}=E_n\boldsymbol{b}$ より任意の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}={}^t[b_1\,\cdots\,b_n]$ は

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1b_1+\cdots+\boldsymbol{e}_nb_n$$

と $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ の一次結合で表せる. また $\boldsymbol{e}_1t_1+\boldsymbol{e}_2t_2+\cdots+\boldsymbol{e}_nt_n=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}$. よって $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ は一次独立である. また, この部分集合 $\boldsymbol{e}_{i_1},\boldsymbol{e}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{e}_{i_k}$ も同様に一次独立である.

例 2 (基本解の一次独立性) 同次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $r{=}\operatorname{rank}A<n$ のとき $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1t_1{+}\cdots{+}\boldsymbol{x}_{n-r}t_{n-r}$ と, 前節で構成した基本解の一次結合で表される. また, $X=[\boldsymbol{x}_1\,\cdots\,\boldsymbol{x}_{n-r}]$ の行を並べ替えると

$$X\mapsto Y=[\boldsymbol{y}_1\,\cdots\,\boldsymbol{y}_{n-r}]=\begin{bmatrix}-C\\ E_{n-r}\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}E_{n-r}\\ -C\end{bmatrix}.$$

行を並べ替える操作は行交換を繰り返すことで得られ, 各列を掃き出せば X の階段行列 $\begin{bmatrix}E_{n-r}\\ O\end{bmatrix}$ が得られる.
よって $\operatorname{rank}X=n{-}r=$ ベクトルの個数. 従って定理 (A) より この基本解 $\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{n-r}\}$ は一次独立である.

• 一般に方程式の解全体の集合を**解集合**といい, 同次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解集合 W_A を $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の**解空間** という. 一般にベクトルの組 $\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_s\}$ の一次結合全体の集合 $W=\langle\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_s\rangle$ を $\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_s\}$ の**生成する部分空間** といい, $\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_s\}$ は W の**生成系**, 又は W を**生成する**という. また, 生成系が一次独立のとき, **基底**であるといい, その個数 s を W の**次元** という. 解空間 W_A は基本解の一次結合全体の集合なので基本解 $\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{n-r}\}$ は W_A の生成系であり, 例 2 より一次独立なので基底になり, 次元は $n-\mathrm{rank}\ A$ である. 詳しくは第 4 章で述べられる.

♠ 連立一次方程式の計算例の検算の項参照

例の検算の項で見た様に, 軸列でない列は軸列の一次結合として表される. 即ち, 一般に次が成り立つ.

定理 (B) (軸列の一次独立性) m 次元列ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ に対し, $A=[\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$ ($m\times n$ 行列) とし, A の階段行列を $PA=B=[b_{ij}]$ (P は正則行列), 階数を r, 軸列を $q_1,q_2,\ldots,q_r$ とする, 即ち

$$PA=B=[\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \ldots\ \boldsymbol{b}_n]=[b_{ij}]=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} q_1 & & q_2 & \cdots & q_r \end{array} \\ [\ \boldsymbol{e}_1\ *\ \boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \boldsymbol{e}_r\ \cdots\ ] \end{array}$$

とするとき, A の軸列 $\boldsymbol{a}_{q_1},\boldsymbol{a}_{q_2},\ldots,\boldsymbol{a}_{q_r}$ (r 個) は一次独立であり, 他の列 $\boldsymbol{a}_j$ は B の第 j 列 $\boldsymbol{b}_j$ の成分を係数とする, $\boldsymbol{a}_j$ より左側にある軸列の一次結合として一意的に表される, 即ち

$$q_i<j<q_{i+1}\Rightarrow \boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{a}_{q_1}b_{1j}+\boldsymbol{a}_{q_2}b_{2j}+\cdots+\boldsymbol{a}_{q_i}b_{ij}=\sum_{k=1}^{i}\boldsymbol{a}_{q_k}b_{kj}\quad (i=1,\ldots,r,\ q_{r+1}=n+1)$$

と表される. 特に軸列の組 $\boldsymbol{a}_{q_1},\ldots,\boldsymbol{a}_{q_r}$ は $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ の生成する部分空間の基底であり, 次が成り立つ.

$$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n \text{ の中の一次独立なベクトルの組の最大個数 } =\mathrm{rank}\ A$$

証明 $PA=[P\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ P\boldsymbol{a}_n]=B=[\boldsymbol{b}_1\ \cdots\ \boldsymbol{b}_n]$ より $P\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{b}_j$. 特に $P\boldsymbol{a}_{q_i}=\boldsymbol{b}_{q_i}=\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,\ldots,r)$ が成り立つ. このとき A の軸列から作った行列 $[\boldsymbol{a}_{q_1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{q_r}]$ に同じ行変形 ($=P$ を左から掛ける) を行えば次の形の階段行列になる：

$$P[\boldsymbol{a}_{q_1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{q_r}]=[P\boldsymbol{a}_{q_1}\ \cdots\ P\boldsymbol{a}_{q_r}]=[\boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_r]=\begin{bmatrix}E_r\\ O\end{bmatrix}$$

$\therefore\ \mathrm{rank}\,[\boldsymbol{a}_{q_1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{q_r}]=r$ ($=$ 個数). 「個数=階数」より $\boldsymbol{a}_{q_1},\ldots,\boldsymbol{a}_{q_r}$ は一次独立. (定理 (A))
$q_i<j<q_{i+1}$ のとき, $[\boldsymbol{a}_{q_1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{q_i}\ \boldsymbol{a}_j]$ は方程式 $\boldsymbol{a}_{q_1}x_1+\boldsymbol{a}_{q_2}x_2+\cdots+\boldsymbol{a}_{q_i}x_i=\boldsymbol{a}_j$ の拡大係数行列であり, 同じ行変形を行えば, 階段行列の定義より $\boldsymbol{b}_j$ の第 $i+1$ 行以下は $\boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{b}_j$ の i 行目までを $\boldsymbol{b}'_j$ とすると

$$P[\boldsymbol{a}_{q_1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{q_i}\ \boldsymbol{a}_j]=[\boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_i\ \boldsymbol{b}_j]=\begin{bmatrix}E_i & \boldsymbol{b}'_j\\ O & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

従ってこの方程式は唯一の解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}'_j$ をもち, これを代入すれば $\boldsymbol{a}_{q_1}b_{1j}+\boldsymbol{a}_{q_2}b_{2j}+\cdots+\boldsymbol{a}_{q_i}b_{ij}=\boldsymbol{a}_j\cdots(*)$ を得る.
$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}_1t_1+\cdots+\boldsymbol{a}_nt_n$ と一次結合で表されているとき, 軸列でない $\boldsymbol{a}_j$ に $(*)$ を代入すれば $\boldsymbol{c}$ が 軸列の組の一次結合で表せることが分り, 軸列の組は基底になる. □

(注) 未知数が n 個の方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の一つの解 (特殊解) を $\tilde{\boldsymbol{d}}$ $(A\tilde{\boldsymbol{d}}=\boldsymbol{b})$ とし, $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_s$ を $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に付随する同次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解 $(A\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{0})$ とする. このとき $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_s$ の一次結合 $\boldsymbol{x}_1t_1+\cdots+\boldsymbol{x}_st_s$ は

$$A(\boldsymbol{x}_1t_1+\cdots+\boldsymbol{x}_st_s)=A\boldsymbol{x}_1t_1+\cdots+A\boldsymbol{x}_st_s=\boldsymbol{0}t_1+\cdots+\boldsymbol{0}t_s=\boldsymbol{0}$$

より $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解になり, $\tilde{\boldsymbol{d}}+\boldsymbol{x}_1t_1+\cdots+\boldsymbol{x}_st_s$ は, $A(\tilde{\boldsymbol{d}}+\boldsymbol{x}_1t_1+\cdots+\boldsymbol{x}_st_s)=A\tilde{\boldsymbol{d}}+A(\boldsymbol{x}_1t_1+\cdots+\boldsymbol{x}_st_s)=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{b}$ より $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解になる. このとき $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の全ての解が $\tilde{\boldsymbol{d}}+\boldsymbol{x}_1t_1+\cdots+\boldsymbol{x}_st_s$ の形に表せる為には $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_s$ が $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間の基底, 即ち

$$s=n-\mathrm{rank}\ A\quad \text{かつ}\quad \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_s \text{ が一次独立 } (\Leftrightarrow \mathrm{rank}\,[\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_s]=s)$$

であることが必要十分条件である. (このとき $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_s$ も基本解という.)