

**行列の分割** 行列はいくつかの縦線と横線で区切って 2 つ以上の行列に分割して表すと便利なことが多い。行列の行分割、列分割もその一例である。また例えば 行列  $A$  のある分割は

$$A = \left[ \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} P & Q \\ R & S \end{array} \right], \quad P = \left[ \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right], \quad Q = \left[ \begin{array}{c} a_{13} \\ a_{23} \end{array} \right]$$

$$R = \left[ \begin{array}{c} a_{31} \\ a_{32} \end{array} \right], \quad S = \left[ \begin{array}{c} a_{33} \end{array} \right]$$

の中辺の様に幾つかの縦線と横線で区切って表されたり、右辺の様に区切り線を除いて表される。ここで、 $P$  と  $Q$ 、 $R$  と  $S$  の行数はそれぞれ等しく、 $P$  と  $R$ 、 $Q$  と  $S$  の列数もそれぞれ等しい。

分割された  $P, Q$  などの小さな行列を  $A$  の 小行列、または ブロックという。また、分割は 区分け や ブロック分割とも呼ばれる。一般には  $(p - 1)$  個の横線と  $(q - 1)$  個の縦線で区切り、

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} A_{11} & \cdots & A_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pq} \end{array} \right]$$

の様に表される。正方行列においては、対角成分に当たる  $A_{ii}$  がすべて正方行列になる様な分割が重要であり、縦横が対称なので 対称分割と呼ばれる。

分割された行列の和、スカラー倍、積は、行列の和、スカラー倍、積と同様に計算出来る。積については次ページで述べる。例えば積について

$$AB = \left[ \begin{array}{cc} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{array} \right]$$

ここで  $A_1B_1 + A_2B_3$  などの積や和が定義される為に、 $A$  の列数と  $B$  の行数は等しく、 $A$  の列の分け方と  $B$  の行の分け方も等しい、即ち、 $A_1, A_2$  の列数と  $B_1, B_3$  の行数がそれぞれ等しくなる様に分割されている必要がある。（従って  $A_3, A_4$  の列数と  $B_2, B_4$  の行数もそれぞれ等しい。）また、積の順序は交換できない。これを用いれば  $A_3 = O, B_3 = O$ （ブロック上三角型）のとき（特に  $A_2 = O, B_2 = O$ 、ブロック対角型のとき）

$$AB = \left[ \begin{array}{cc} A_1 & A_2 \\ O & A_4 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ O & B_4 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} A_1B_1 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ O & A_4B_4 \end{array} \right] \quad \left( AB = \left[ \begin{array}{cc} A_1 & O \\ O & A_4 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} B_1 & O \\ O & B_4 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} A_1B_1 & O \\ O & A_4B_4 \end{array} \right] \right).$$

転置行列については、

$${}^t A = \left[ \begin{array}{cc} {}^t A_1 & {}^t A_3 \\ {}^t A_2 & {}^t A_4 \end{array} \right], \quad {}^t A = [{}^t \mathbf{a}^1, {}^t \mathbf{a}^2, \dots, {}^t \mathbf{a}^m], \quad \text{など}.$$

問 次の行列の積を計算せよ。

$$\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right] = \left( \left[ \begin{array}{ccc} 10 & 13 & 0 \\ 22 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \right] \right)$$

問 次の分割された行列は積が定義されるものとして、積を計算せよ。 $(E$  は単位行列。)

$$(1) \left[ \begin{array}{cc} P & O \\ O & E \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right] \quad (2) \left[ \begin{array}{cc} E & X \\ O & E \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right] \quad (3) \left[ \begin{array}{cc} O & E \\ E & O \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right]$$

$$(4) \left[ \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} E & O \\ O & P \end{array} \right] \quad (5) \left[ \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} E & X \\ O & E \end{array} \right] \quad (6) \left[ \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} O & E \\ E & O \end{array} \right]$$

**定理 (分割された行列の積)**

$l \times m$  行列  $A = [a_{ij}]$ ,  $m \times n$  行列  $B = [b_{ij}]$  とそれらの積  $C = AB = [c_{ij}]$  が

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{q1} & B_{q2} & \cdots & B_{qr} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pr} \end{bmatrix}$$

と分割されていて、 $A_{st}$  が  $(l_s, m_t)$  型、 $B_{tu}$  が  $(m_t, n_u)$  型、 $C_{su}$  が  $(l_s, n_u)$  型とする。即ち  $A_{st}$  と  $B_{tu}$  は積の取れる型、 $C_{su}$  はそれらの積の型となる様分割されているとする。ここで

$$l = l_1 + \cdots + l_p, \quad m = m_1 + \cdots + m_q, \quad n = n_1 + \cdots + n_r$$

である。このとき

$$(1) \quad C_{su} = \sum_{t=1}^q A_{st}B_{tu} = A_{s1}B_{1u} + \cdots + A_{sq}B_{qu}$$

が成り立つ。即ち分割された行列の積は通常の行列の積と同様に計算される。

**証明** 添え字の対応のみが問題である：

(1) の両辺の  $(v, w)$  成分が等しいこと、つまり  $(C_{su})_{vw} = (\sum_{t=1}^q A_{st}B_{tu})_{vw}$  を示す。

$C$  の  $(i, j)$  成分  $c_{ij}$  が  $C_{su}$  の  $(v, w)$  成分  $(C_{su})_{vw}$  に対応しているとする。即ち

$$i = l_1 + \cdots + l_{s-1} + v, \quad j = n_1 + \cdots + n_{u-1} + w$$

とする。また

$$M_t = m_1 + \cdots + m_{t-1} \quad (t = 1, \dots, q+1 \quad \text{ただし } M_1 = 0, \quad M_{q+1} = m), \quad k = M_t + h$$

すると、 $A_{st}$  の  $(v, h)$  成分  $(A_{st})_{vh}$  が  $A$  の  $(i, k)$  成分  $a_{ik}$  と  $B_{tu}$  の  $(h, w)$  成分  $(B_{tu})_{hw}$  が  $B$  の  $(k, j)$  成分  $b_{kj}$  に対応している。このとき

$$\begin{aligned} (A_{st}B_{tu})_{vw} &= \sum_{h=1}^{m_t} (A_{st})_{vh} (B_{tu})_{hw} = \sum_{k=M_t+1}^{M_t+m_t} a_{ik}b_{kj} \quad (M_t + m_t = M_{t+1}), \\ (C_{su})_{vw} = c_{ij} &= \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj} = \sum_{t=1}^q \sum_{k=M_t+1}^{M_t+m_t} a_{ik}b_{kj} = \sum_{t=1}^q (A_{st}B_{tu})_{vw} = (\sum_{t=1}^q A_{st}B_{tu})_{vw} \end{aligned}$$

より定理は証明された。