

## 行列式の計算例

### 基本変形と次数低下法による計算

- 行基本変形 (定理 3.5) を用いて第 1 列を掃き出す.
- 次数低下法 I (定理 3.6) を用いて次数を下げる.
- これらを繰り返して、1 次または 2 次の行列式の計算に帰着する.

基本的にはこの方法で行列式の値は計算できる。(列基本変形と次数低下法(一般形)を用いても良い。)

(以下では  $s_{ri}$  は第  $i$  行から  $s$  を括り出す記号とする。 $sc_i$  も同様。)

### 例 1 (行基本変形と次数低下法による計算)

$$(1) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{r_3 - 2r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{例 12}}{=} 1 \cdot (-2) \cdot (-1) = 2,$$

$$(2) |B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{2r_2}{=} 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{r_1 \leftrightarrow r_2}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{r_3 - 3r_1}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{3.6}{=} -2 \cdot 1 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{3r_1}{=} -2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$(3) |C| = \begin{vmatrix} 100 & 101 & 102 \\ 101 & 102 & 103 \\ 102 & 102 & 100 \end{vmatrix} \stackrel{r_2 - r_1}{=} \begin{vmatrix} 100 & 101 & 102 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{r_3 - 100r_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} \stackrel{r_1 \leftrightarrow r_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 2$$

上の例の Sarrus の公式による計算:

$$(1) |A| = 1 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot 4 = 2. \quad (2) |B| = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot 3 - 5 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = 6.$$

$$(3) |C| = 100 \cdot 102 \cdot 100 + 101 \cdot 103 \cdot 102 + 102 \cdot 101 \cdot 102 - 102 \cdot 102 \cdot 102 - 101 \cdot 101 \cdot 100 - 100 \cdot 103 \cdot 102 = 2.$$

### 例 2 (4 次の行列式) (Sarrus の公式は使えない。)

$$(1) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 7 & 9 \end{vmatrix} \stackrel{r_2 - 2r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} \stackrel{3.6}{=} (-2) \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} \stackrel{-r_1}{=} (-2) \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \stackrel{r_2 - 5r_1}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -28 \end{vmatrix} = 56,$$

$$(2) |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{r_2 + 2r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{3r_1}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{r_2 + 2r_1}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

$$(1) \text{ では } (-2) \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} \stackrel{-c_1}{=} (-2)(-1)(-7) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{r_2 - 5r_1}{=} -14 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = (-14)(-4) = 56 \quad \text{や},$$

$$\text{同上 } = (-2)\{(-1)(-7) - (-7)(-5)\} = (-2)(-28) = 56 \quad \text{としても良い}.$$

### 例 3 (基本変形と次数低下法(一般形)(定理 3.17)を用いる例) ((3,3)成分と(2,3)成分を用いて次数低下)

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{r_2 - r_3}{=} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{3.17}{=} (-1)^{3+3} 2 \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{c_1 - 2c_3}{=} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{3.17}{=} 2(-1)^{2+3} 2 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-4) \cdot (-6 - (-1)(-5)) = (-4)(-11) = 44$$

(上の行の最終式で第 1 行の  $(-1)$  を行列式の外に出して計算しても良い。)

$$\text{例 1 では } |B| = 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{r_1 - 2r_2}{=} 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{3.17}{=} -2 \cdot 1 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad |C| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} \stackrel{3.17}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \quad \text{としても良い}.$$

### 例 4 対角成分が $a$ , 他の成分が $b$ の $n$ 次の行列式 $D_n$ を求める:

第 2 ~  $n$  列を第 1 列に加え, 第 1 列を掃き出すと:

$$D_n := \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b \\ a + (n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} \stackrel{\text{例 12}}{=} \{a + (n-1)b\}(a-b)^{n-1}$$

### 余因子展開を併用する方法

$$\text{例 5 } \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \stackrel{c_3 - c_2}{=} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 1-x & -1 \\ -2 & -1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{第 1 行で展開}}{=} x \begin{vmatrix} x-1 & 1-x & -1 \\ -1 & x-1 & 1 \\ 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 1 \begin{vmatrix} 1 & 1-x & -1 \\ -2 & x-1 & 1 \\ 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= x\{(x-1)^3 + (1-x) \cdot 1 \cdot 1 + 0 - (-1)(x-1)1 - (1-x)(-1)(x-1) + 0\}$$

$$- \{1(x-1)^2 + (1-x)1 \cdot 1 + 0 - (-1)(x-1)1 - (1-x)(-2)(x-1) - 0\}$$

$$= x\{(x-1)^3 - (x-1)^2\} - \{-(x-1)^2\} = (x-1)^2\{x(x-1-1) + 1\} = (x-1)^2(x-1)^2 = (x-1)^4$$

**例6 (3重対角行列)** 対角成分が  $a$ , 対角成分の隣の成分が  $b, c$ , ( $a_{i,i-1} = b, a_{i,i+1} = c$ ) 他の成分が 0 の  $n$  次の行列式  $D_n$  の漸化式を求める: 第1列で展開し, 第2項の次数を下げる:

$$D_1 = a, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - bc, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & a & c \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}b \begin{vmatrix} c & 0 \\ b & a \end{vmatrix} = aD_2 - bca,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & a & c & 0 \\ 0 & b & a & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = aD_3 + (-1)^{2+1}b \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ b & a & c \\ 0 & b & a \end{vmatrix} \stackrel{3.16}{=} aD_3 - bc \begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} = aD_3 - bcD_2,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a & c & & & \\ b & a & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ & & & b & a \end{vmatrix} = aD_{n-1} - b \begin{vmatrix} c & & & \\ b & a & c & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & c \\ & & \ddots & b & a \end{vmatrix} \stackrel{3.16}{=} aD_{n-1} - bcD_{n-2} \quad (D_0=1, D_{-1}=0 \text{ として } n \geq 1 \text{ で成立})$$

**例7 (余因子行列等)** 例1の  $A$  の余因子行列  $\tilde{A}$  と逆行列  $A^{-1}$  を求める:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, |A| = 2$

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -6, \quad \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -2, \quad \tilde{a}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2, \quad \tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1, \quad \tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\tilde{a}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad \tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad \tilde{a}_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\tilde{A} = {}^t[\tilde{a}_{ij}] = {}^t \begin{bmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} = \frac{1}{2} \tilde{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -1/2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**例8 (Cramerの公式)**  $a, b, c$  が互いに異なるとき, 次の方程式  $Ax = d$  の解は Cramer の公式により,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}, \quad x = \frac{(d-b)(b-c)(c-d)}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \quad y = \frac{(a-d)(d-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \quad z = \frac{(a-b)(b-d)(d-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

ここで, 分母は  $|A| = (a-b)(b-c)(c-a)$ .  $x, y, z$  の分子は,  $|A|$  の  $a, b, c$  をそれぞれ  $d$  に置き換えたもの.

尚, これらの行列式は下に述べる Vandermonde の行列式なので, 値が差積になることが分る.

**例9 (分割行列の行列式)** 一般に  $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \stackrel{c_1+c_2}{=} \begin{vmatrix} A+B & A \\ B+A & A \end{vmatrix} \stackrel{r_2-r_1}{=} \begin{vmatrix} A+B & A \\ O & A-B \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-C|$  より

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b & a & a \\ a+b & a+b+c & a & a \\ a & a & a+b+c & a+b \\ a & a & a+b & a+b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+b+c & 2a+b \\ 2a+b & 2a+b+c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b+c & b \\ b & b+c \end{vmatrix}$$

$$= \{(2a+b+c)+(2a+b)\}\{(2a+b+c)-(2a+b)\}\{(b+c)+b\}\{(b+c)-b\} = (4a+2b+c)c(2b+c)c = c^2(4a+2b+c)(2b+c)$$

特殊で有用な行列式 : **ヴァンデルモンデの行列式**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

ここで, 左辺を Vandermonde の行列式という. また, 中辺 (および右辺) を 差積といい,  $1 \leq i < j \leq n$  となる組  $(i, j)$  全てにわたる  $\frac{n(n-1)}{2}$  項の積である.

**計算** 左辺の行列式の下の行から順に, すぐ上の行の  $x_1$  倍を引いていく ( $r_n - x_1 r_{n-1}, r_{n-1} - x_1 r_{n-2}, \dots, r_2 - x_1 r_1$ ), 次数を 1 つ下げ, 各列から共通因数  $(x_j - x_1)$  を行列式の外に括り出すと

$$\text{左辺} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & (x_3 - x_1)x_3 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & (x_3 - x_1)x_3^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{j=2}^n (x_j - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

以下帰納的に, 左辺  $= \prod_{j=2}^n (x_j - x_1) \times \prod_{j=3}^n (x_j - x_2) \times \cdots \times (x_n - x_{n-1}) =$  右辺.

**別証** 左辺  $V$  は  $x_1, \dots, x_n$  の  $1+2+\cdots+(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$  次の多項式で,  $x_i = x_j$  とすると  $V$  は ( $c_i = c_j$  より) 0 になる.

よって因数定理により  $x_j - x_i$  は  $V$  の因数になる. これが  $i \neq j$  なる全ての  $i, j$  に対して成り立つので  $V$  は差積で割り切れるが, 次数が等しいので  $V$  は差積の定数倍 ( $c$  倍) になる. 両辺の  $x_2 x_3^2 \cdots x_n^{n-1}$  の係数は 1 なので  $c=1$  で, 両辺は等しい.