

## 行列式の性質

まず  $n$  次正方行列  $A$  を行分割して行に関する性質を調べる.  $A$  の第  $i$  行  $\mathbf{a}^i$  のみを  $\mathbf{b}$  に置き換えた行列を  $A_i(\mathbf{b})$ ,  $A$  の第  $i$  行  $\mathbf{a}^i$  と第  $j$  行  $\mathbf{a}^j$  をそれぞれ  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  に置き換えた行列を  $A_{ij}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$  とする.

$$A = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}^i \\ \vdots \\ \mathbf{a}^j \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad A_i(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^j \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad A_{ij}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{c} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} A_i(\mathbf{a}^i) = A \\ A_{ij}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j) = A \\ A_{ij}(\mathbf{b}, \mathbf{a}^j) = A_i(\mathbf{b}) \end{cases}$$

( $\vdots$  の部分は  $A$  と同じ)

### 行列式の基本的性質

**定理 3.2 (多重線型性 ( $n$  重線型性))** 正方行列  $A$  のある行  $\mathbf{a}^i$  が

(1)  $\mathbf{a}^i = \mathbf{b} + \mathbf{c}$  のとき,  $|A| = |A_i(\mathbf{a}^i)| = |A_i(\mathbf{b})| + |A_i(\mathbf{c})|$ . (1つの行の和は行列式の和に分れる.)

(2)  $\mathbf{a}^i = s\mathbf{b}$  のとき,  $|A| = |A_i(\mathbf{a}^i)| = s|A_i(\mathbf{b})|$ .

(1つの行を定数倍 ( $s$  倍) すれば, 行列式の値も定数倍 ( $s$  倍) になる.) 即ち

$$(1) |A| = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{c} \\ \vdots \end{vmatrix}, \quad (2) |A| = \begin{vmatrix} \vdots \\ s\mathbf{b} \\ \vdots \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \end{vmatrix}$$

((1),(2) の性質を合わせて線型性という. 各行について線形なので,  $n$  行で  $n$  重 (多重) 線形性という.)

**定理 3.3 (交代性)**  $A$  の2つの行  $\mathbf{a}^i$  と  $\mathbf{a}^j$  を入れ替える (行の互換を行う) と符号が変わる: 即ち

$$|A| = |A_{ij}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j)| = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}^i \\ \vdots \\ \mathbf{a}^j \\ \vdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}^j \\ \vdots \\ \mathbf{a}^i \\ \vdots \end{vmatrix} = -|A_{ij}(\mathbf{a}^j, \mathbf{a}^i)|$$

(正規性) 単位行列  $E$  の行列式は 1. ( $|E| = 1$ .)

以上3つが行列式の最も基本的な性質であり, この性質で行列式が決定される.

**証明** 定理 3.2:  $\mathbf{b} = [b_{i1} \cdots b_{in}]$ ,  $\mathbf{c} = [c_{i1} \cdots c_{in}]$  とすると,

$$(I-1) |A| = \sum \varepsilon(\mathbf{p}) \cdots a_{ip_i} \cdots = \sum \varepsilon(\mathbf{p}) \cdots (b_{ip_i} + c_{ip_i}) \cdots = \sum \varepsilon(\mathbf{p}) \cdots b_{ip_i} \cdots + \sum \varepsilon(\mathbf{p}) \cdots c_{ip_i} \cdots = \text{右辺.}$$

$$(I-2) |A| = \sum \varepsilon(\mathbf{p}) \cdots a_{ip_i} \cdots = \sum \varepsilon(\mathbf{p}) \cdots (s b_{ip_i}) \cdots = s \left( \sum \varepsilon(\mathbf{p}) \cdots b_{ip_i} \cdots \right) = s A_i(\mathbf{b}) = \text{右辺.}$$

定理 3.3: 互換を行うと符号が変わるので  $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\cdots p_i \cdots p_j \cdots) = -\varepsilon(\cdots p_j \cdots p_i \cdots) = -\varepsilon(\mathbf{pt})$  ( $t=(i, j)$ ) より

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(\cdots p_i \cdots p_j \cdots) (\cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots) = (-1) \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(\cdots p_j \cdots p_i \cdots) (\cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots) \\ &= (-1) \sum_{\mathbf{pt}} \varepsilon(\cdots p_j \cdots p_i \cdots) (\cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots) = -|A_{ij}(\mathbf{a}^j, \mathbf{a}^i)| = \text{右辺} \end{aligned}$$

( $\mathbf{p}$  が  $n$  次の置換全体を動くとき,  $\mathbf{pt}$  も  $n$  次の置換全体を動く.) □

**注意**  $A$  のある行  $\mathbf{a}^i$  が一次結合  $\mathbf{a}^i = \sum_{k=1}^r s_k \mathbf{b}_k$  のとき, 線型性 (1),(2) を繰り返し用いれば,

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \sum_{k=1}^r s_k \mathbf{b}_k \\ \vdots \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} \vdots \\ \sum_{k=1}^{r-1} s_k \mathbf{b}_k \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ s_r \mathbf{b}_r \\ \vdots \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \cdots \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=1}^r \begin{vmatrix} \vdots \\ s_k \mathbf{b}_k \\ \vdots \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \sum_{k=1}^r s_k \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{b}_k \\ \vdots \end{vmatrix} \quad (\text{行列式の一次結合})$$

**系 1**  $A$  の第  $i$  行を第 1 行に移し, 第 1 ~  $(i-1)$  行を 1 つずつ下にずらした行列を  $A'$  とするとき,

$$|A| = (-1)^{i-1} |A'|$$

**証明**  $A'$  は  $A$  の行に巡回置換  $(1, 2, \dots, i)^{-1}$  を行った行列であり, これは隣接互換を  $(i-1)$  回繰り返せばえられるので交代性 (定理 3.3) より系が成り立つ. □

**行列式の行に対する性質** 行列式の基本性質より以下の種々の性質が導かれる.

**定理 3.4 (値が 0 になる行列式)** 次の行列  $A$  の行列式の値は 0 になる:

- (1) ある行の成分が全て 0. ( $\mathbf{a}^i = \mathbf{0} \Rightarrow |A| = |A_i(\mathbf{0})| = 0$ )
  - (2) ある 2 つの行が等しい. ( $\mathbf{a}^i = \mathbf{a}^j, i \neq j \Rightarrow |A| = |A_{ij}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^i)| = 0$ )
  - (3) ある行が他の行に比例している. ( $\mathbf{a}^j = s\mathbf{a}^i, i \neq j \Rightarrow |A| = |A_{ij}(\mathbf{a}^i, s\mathbf{a}^i)| = 0$ )
- ((1),(2) は (3) において, それぞれ  $s = 0, s = 1$  とした特別な場合である.)

**証明** (1) 多重線形性 (2) において,  $s = 0, \mathbf{a}^i = \mathbf{00}$  とすればよい: 即ち  $|A| = |A_i(\mathbf{a}^i)| = |A_i(\mathbf{00})| = 0|A_i(\mathbf{0})| = 0$   
 (2)  $\mathbf{a}^i = \mathbf{a}^j$  より この 2 つの行を入れ換えても行列および行列式の値は変わらない. 一方, 交代性 (2 つの行を入れ換えると行列式は  $(-1)$  倍) より  $|A| = |A_{ij}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j)| = -|A_{ij}(\mathbf{a}^j, \mathbf{a}^i)| = -|A|$  となり  $|A| = 0$  を得る.  
 ((1),(2) は行列式の定義から直接導くことも出来る.)  
 (3)  $\mathbf{a}^i = s\mathbf{a}^j$  より多重線形性 (2) と上の (2) を用いて,  $|A| = |A_{ij}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j)| = |A_{ij}(s\mathbf{a}^j, \mathbf{a}^j)| = s|A_{ij}(\mathbf{a}^j, \mathbf{a}^j)| = 0$ .  $\square$

**定理 3.5 (行基本変形と行列式)**

- (R1) ある行を  $s$  倍すると行列式の値も  $s$  倍になる. ( $sr_i$ .)
- (R2) ある行に他の行の  $s$  倍を加えても行列式の値は変わらない. ( $r_i + sr_j$ .)
- (R3) 2 つの行を入れ替えると行列式の値は  $(-1)$  倍になる. ( $r_i \leftrightarrow r_j$ .)

**証明** (R1) は多重線形性 (2), (R3) は交代性そのものである.  
 (R2):  $A$  は  $r_i + sr_j$  により  $\mathbf{a}^i$  を  $\mathbf{a}^i + s\mathbf{a}^j$  に変えた行列  $A_{ij}(\mathbf{a}^i + s\mathbf{a}^j, \mathbf{a}^j)$  になるので, 多重線形性 (1) と直前の定理 3.4 (3) により,  $|A_{ij}(\mathbf{a}^i + s\mathbf{a}^j, \mathbf{a}^j)| = |A_{ij}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j)| + |A_{ij}(s\mathbf{a}^j, \mathbf{a}^j)| = |A_{ij}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j)| + 0 = |A|$   $\square$   
 この定理の特に (R2) により, ある列を掃き出しても行列式の値は変化しないことが分かった. 掃き出された行列の行列式には次の定理が有効である.

**定理 3.6 (次数低下法 I)** 行列の第 1 列や最下行が掃き出されているとき:

$$(1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \left( \begin{vmatrix} a_{11} & * \\ \mathbf{0} & A' \end{vmatrix} = a_{11} |A'| \right)$$

$$(2) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} a_{nn} \quad \left( \begin{vmatrix} A'' & * \\ \mathbf{0} & a_{nn} \end{vmatrix} = |A''| a_{nn} \right)$$

**証明** まず, 下の (2) 式を示す. この左辺では  $a_{n1} = \cdots = a_{n,n-1} = 0$  なので  $|A| = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(\mathbf{p}) a_{1p_1} \cdots a_{np_n}$  の中の  $p_n = n$  以外の項は 0. 即ち  $\mathbf{p} = (p_1 \cdots p_{n-1} n)$  となる項のみ残る. これは  $1, \dots, n-1$  の置換  $\mathbf{p}' = (p_1 \cdots p_{n-1})$  とみなせ,  $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}')$ . 和は  $(n-1)$  次の置換全体にわたってとることになる. よって,

$$\text{左辺} = \sum_{\mathbf{p}=(p_1 \cdots p_{n-1}, n)} \varepsilon(\mathbf{p}) a_{1p_1} \cdots a_{n-1,p_{n-1}} a_{nn} = \left( \sum_{\mathbf{p}'=(p_1, \dots, p_{n-1})} \varepsilon(\mathbf{p}') a_{1p_1} \cdots a_{n-1,p_{n-1}} \right) a_{nn} = \text{右辺}$$

(1) 式も同様に, 左辺では  $a_{21} = \cdots = a_{n1} = 0$  なので  $a_{1p_1} \cdots a_{np_n}$  の中で  $a_{11}$  以外の  $a_{i1}$  を含む項は 0. 即ち,  $i \geq 2$  ならば  $p_i \geq 2$  となる  $\mathbf{p} = (1, p_2, \dots, p_n)$  の項しか残らない. この  $\mathbf{p}$  は  $2, \dots, n$  の置換  $\mathbf{p}' = (p_2 \cdots p_n)$  とみなせ,  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{p}'$  の転倒数は同じなので  $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}')$ . 和は  $2, \dots, n$  の  $(n-1)$  次の置換全体にわたる. よって,

$$|A| = \sum_{\mathbf{p}=(1, p_2, \dots)} \varepsilon(\mathbf{p}) a_{11} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = a_{11} \left( \sum_{\mathbf{p}'=(p_2, \dots)} \varepsilon(\mathbf{p}') a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \right) = \text{右辺} \quad \square$$

**例 (上三角行列)** この定理を繰り返し用いることにより次が分る:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{kk} & * \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & & A' \end{vmatrix} = a_{11} \cdots a_{kk} |A'|, \quad \begin{vmatrix} A'' & & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{kk} & * \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = |A''| a_{kk} \cdots a_{nn}$$

特に:  $\begin{vmatrix} E & C \\ O & A' \end{vmatrix} = |A'|, \quad \begin{vmatrix} A'' & C \\ O & E \end{vmatrix} = |A''|$

掃き出しと次数低下法を用いれば (3 次も含め) 次数の大きな行列式の計算もできる.