特殊で有用な行列式 2： 終結式 (resultant, Sylvester の行列式) と判別式 n 次と m 次の多項式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\ (a_n\neq 0),\quad g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0\ (b_m\neq 0)$$

に対し, 次の $(m+n)$ 行列 R の行列式 $r(f,g)=|R|$ を**終結式 (resultant)** (**Sylvester の行列式**) という.

$$R=\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & & & O \\ & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & & \\ O & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & & & O \\ & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & & \\ O & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix},\quad R\begin{bmatrix} x^{n+m-1} \\ x^{n+m-2} \\ \vdots \\ x^n \\ \vdots \\ x \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f(x)x^{m-1} \\ f(x)x^{m-2} \\ \vdots \\ f(x) \\ g(x)x^{n-1} \\ \vdots \\ g(x) \end{bmatrix}\qquad\cdots(*)$$

即ち R は, $(m+n-1)$ 次 (以下) の $(m+n)$ 個の連立方程式 $f(x)x^{m-1}=0,\ldots,f(x)=0,\ g(x)x^{n-1}=0,\ldots,g(x)=0$ の係数行列, つまりこれらの方程式中の $x^{n+m-1},\ldots,x,1$ を $x_1,\ldots,x_{n+m-1},x_{n+m}$ に置き換えて得られる連立一次方程式の係数行列である. このとき

定理 1 $f(x)=0,\ g(x)=0$ は共通根 (=共通解) をもつ $\Leftrightarrow r(f,g)=0$

また, $f(x)=0$ が重根をもつ $\Leftrightarrow f'(x)=na_nx^{n-1}+\cdots+a_1$ と $f(x)=0$ が共通根をもつ $\Leftrightarrow r(f,f')=0$, より

$$r(f,f')=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_nD(f),\quad D(f):=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}r(f,f')/a_n$$

とおき, $D(f)$ を f の**判別式 (discriminant)** という. $f(x)=ax^2+bx+c$ のとき

$$r(f,f')=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix}=ab^2+4a^2c-2ab^2=4a^2c-ab^2=-a(b^2-4ac),\ D(f)=b^2-4ac$$

定理 1 の証明 $(\Rightarrow)$ $f(\alpha)=0,\ g(\alpha)=0$ とすると連立一次方程式 $R\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は自明でない解 $\boldsymbol{x}={}^t[\alpha^{n+m-1}\cdots\alpha\,1]$ をもつ, $\therefore$ rank $R<m+n$. $\Leftrightarrow R$ は正則でない $\Leftrightarrow r(f,g)=|R|=0$.

$(\Leftarrow)$ R の余因子行列 $\widetilde{R}$ は $\widetilde{R}R=|R|E$ をみたすので, 上の式 $(*)$ の右の式の両辺に左から $\widetilde{R}$ を掛ける. 最下行 $(=n+m$ 行) に注目して $\widetilde{R}$ の最下行を $[c_1\cdots c_m\,d_1\cdots d_n]$ とすれば

$$|R|E\begin{bmatrix} x^{n+m-1} \\ \vdots \\ x^n \\ \vdots \\ x \\ 1 \end{bmatrix}=\widetilde{R}\begin{bmatrix} f(x)x^{m-1} \\ \vdots \\ f(x) \\ g(x)x^{n-1} \\ \vdots \\ g(x) \end{bmatrix},\quad \begin{aligned} &\text{最下行: } |R|1= \\ &c_1f(x)x^{m-1}+\cdots+c_mf(x)+d_1g(x)x^{n-1}+\cdots+d_ng(x) \\ &=(c_1x^{m-1}+\cdots+c_m)f(x)+(d_1x^{n-1}+\cdots+d_n)g(x) \\ &=h(x)f(x)+k(x)g(x) \\ &(h(x)=c_1x^{m-1}+\cdots+c_m,\ k(x)=d_1x^{n-1}+\cdots+d_n) \end{aligned}$$

即ち $r(f,g)=|R|=h(x)f(x)+k(x)g(x)$. $r(f,g)=0$ のとき $h(x)f(x)=-k(x)g(x)$. $k(x)$ は $n-1$ 次以下, $h(x)$ は $m-1$ 次以下で, それぞれ $g(x)$, $f(x)$ より低次なので $f(x)$ と $g(x)$ は共通因数をもつ. ($h(x)$ と $k(x)$ からこれらの共通因数を除いたものを $h_1(x)$, $k_1(x)$ とすれば $g(x),f(x)$ は $h_1(x)$, $k_1(x)$ で割り切れ, $f(x)/k_1(x)=-g(x)/h_1(x)$ が $f(x)$ と $g(x)$ の (1 次以上の) 共通因数になる.)

補足: 分割された行列の行列式

分割された行列の「基本変形」やその行列式も通常の場合と同様に考えられる.
ここでは簡単の為, 2×2 の形に対称に分割された行列と行列式の「基本変形」について述べる.
次の行列式については次数低下法により,

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} A & B \\ O & E_n \end{vmatrix}=|A|=\begin{vmatrix} A & O \\ C & E_n \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} E_m & B \\ O & D \end{vmatrix}=|D|=\begin{vmatrix} E_m & O \\ C & D \end{vmatrix}.$$

ここで, A は m 次, D は n 次の正方行列, C は (m,n) 型, D は (n,m) 型の行列とする.
次の行列を分割された行列の「ブロック $(2,2)$ 型の基本行列」と考える.
P は m 次, Q は n 次の正則行列, R は (m,n) 型, S は (n,m) 型の行列として,

$$(2)\qquad \text{(i)}\quad \begin{bmatrix} E_m & R \\ O & E_n \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} E_m & O \\ S & E_n \end{bmatrix}\quad(\leftrightarrow r_i+sr_j),\qquad \text{(ii)}\quad \begin{bmatrix} P & O \\ O & E_n \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} E_m & O \\ O & Q \end{bmatrix}\quad(\leftrightarrow sr_i).$$

これらの行列式は (1) より，

(3) (i) $\begin{vmatrix} E_m & R \\ O & E_n \end{vmatrix} = 1 = \begin{vmatrix} E_m & O \\ S & E_n \end{vmatrix}$, (ii) $\begin{vmatrix} P & O \\ O & E_n \end{vmatrix} = |P|$, $\begin{vmatrix} E_m & O \\ O & Q \end{vmatrix} = |Q|$.

「基本行列」(i) を左から掛けてみると

$$\begin{bmatrix} E_m & R \\ O & E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+RC & B+RD \\ C & D \end{bmatrix}.$$

積の行列式は行列式の積に等しく，左辺第１項の行列式は 1 より，

(4) $$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m & R \\ O & E_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+RC & B+RD \\ C & D \end{vmatrix}.$$

(即ち,「第１行」に「第２行」の R 倍を加えても行列式は変化しない.)
「第１行」を正則行列倍（ P 倍）すると (3-ii) より

(5) $$|P| \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P & O \\ O & E_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} PA & PB \\ C & D \end{vmatrix}.$$

(「第１行」を P 倍すると行列式は $|P|$ 倍になる.)
即ち，分割された行列の行列式においてもブロック型の基本変形に対し通常の行列式に対する基本変形と同様の変化をする.
また，ブロック三角行列の行列式は対角成分の行列式の積になることが，

(6) $$|A||D| = |D||A| = \begin{vmatrix} E_m & O \\ O & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ O & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & E_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_m & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

より分かる.（ブロック三角行列の行列式は対角成分の行列式の積.）
行交換，列交換については，行ベクトルや列ベクトルに分割して考える．列について書くと，$\boldsymbol{b}_1$ を第１列に移す巡回置換（m 回隣接互換）により，符号が $(-1)^m$ 倍になり，これを n 回繰り返すので $(-1)^{mn}$ 倍になる．即ち，

$$|\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1, \cdots \boldsymbol{b}_n| = (-1)^m |\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_2 \cdots \boldsymbol{b}_n| = \cdots = (-1)^{mn} |\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{a}_1, \cdots \boldsymbol{a}_m|.$$

行についても同様にすることにより，合わせて

(7) $$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} C & D \\ A & B \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} B & A \\ D & C \end{vmatrix}.$$

特に $m = n$ のとき $(-1)^{n^2} = (-1)^n$ より

(8) $$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} C & D \\ A & B \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} B & A \\ D & C \end{vmatrix}.$$

「ブロック基本行列」を左右から掛けることによる上述以外の変形を以下に列挙すると，

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m & O \\ S & E_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ SA+C & SB+D \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_m & R \\ O & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & AR+B \\ C & CR+D \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_m & O \\ S & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+BS & B \\ C+DS & D \end{vmatrix}, \quad |Q| \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m & O \\ O & Q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ QC & QD \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} |P| = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P & O \\ O & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AP & B \\ CP & D \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} |Q| = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_m & O \\ O & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & BQ \\ C & DQ \end{vmatrix}.$$

特に $m = n$ のときは A, B, C, D は全て n 次正方行列で，$R = S = sE$ （s はスカラー）とすれば

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+sC & B+sD \\ C & D \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C+sA & D+sB \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B+sA \\ C & D+sC \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+sB & B \\ C+sD & D \end{vmatrix}.$$