

転置行列, 正則行列

行列の転置 $m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ の行と列を入れ替えてできる $n \times m$ 行列を A の **転置行列** (transpose matrix) といい ${}^t A$ で表す: $({}^t A)_{ij} = a_{ji}$. (転置行列を A^T と表す文献もあるが, A の T 乗との混同を避ける為ここでは用いない.)

例 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \implies {}^t A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ (\Rightarrow は「ならば」を表す. $P \Leftarrow Q$ は「 Q ならば P 」を表す.)

一般には

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \implies {}^t A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ の転置は 行ベクトル ${}^t \mathbf{x} = [x_1 \cdots x_n]$ で, その逆も成り立つ. 列ベクトル \mathbf{x} の成分をこの式

を用いて表したり, $\mathbf{x} = {}^t [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$ と表すことがある. (紙面の節約の為)

特に, 基本行ベクトル \mathbf{e}^i と基本列ベクトル \mathbf{e}_i について $\mathbf{e}^i = {}^t \mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_i = {}^t \mathbf{e}^i$.

零ベクトルは行ベクトルと列ベクトルと同じ記号 $\mathbf{0}$ で表したが, これらを区別するときは, $\mathbf{0}$ は列ベクトルを表すとし, 行ベクトルは ${}^t \mathbf{0}$ で表す. 即ち, ${}^t \mathbf{0} = [0 \cdots 0]$.

複素共役行列と随伴行列 行列 $A = [a_{ij}]$ の各成分を共役複素数で置き換えた行列 $[\bar{a}_{ij}]$ を A の **複素共役行列** といい, \bar{A} で表す: $(\bar{A})_{ij} = \bar{a}_{ij}$.

行列 A に対し ${}^t(\bar{A}) = \overline({}^t A)$ が成り立つのので, この両辺 ${}^t \bar{A}$ を A^* と表し, A の**随伴行列**という: $(A^*)_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

A が実行列のときは $A^* = {}^t A$. (随伴行列を A^\dagger と表す文献もある.)

定理 1.1 [転置行列, 複素共役行列, 隨伴行列の性質]

$$(1) {}^t({}^t A) = A, \quad (2) {}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B, \quad (3) {}^t(AB) = ({}^t B)({}^t A), \quad (4) {}^t(sA) = s({}^t A).$$

$$(1) \bar{\bar{A}} = A, \quad (2) \overline{(A + B)} = \bar{A} + \bar{B}, \quad (3) \overline{(AB)} = \bar{A} \bar{B} \quad (4) \overline{(sA)} = \bar{s} \bar{A}, \quad (5) A \text{ が実行列} \Leftrightarrow \bar{A} = A$$

$$(1) A^{**} = A, \quad (2) (A + B)^* = A^* + B^*, \quad (3) (AB)^* = (B^*)(A^*), \quad (4) (sA)^* = \bar{s} A^*$$

証明 (2), (3) では和, 積が定義されているものとする. $A = [a_{ij}]$ は (m, n) 型, $B = [b_{ij}]$ は (n, ℓ) 型として (3) を示す. (他は容易.)

$${}^t(AB)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n ({}^t B)_{ik} ({}^t A)_{kj} = ({}^t B)({}^t A), \quad (\bar{A}\bar{B})_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{a}_{ik} \bar{b}_{kj} = \sum_{k=1}^n \bar{a}_{ik} \bar{b}_{kj} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$\text{例 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3i & 2+i \end{bmatrix} \Rightarrow {}^t A = \begin{bmatrix} 1 & -3i \\ 2 & 2+i \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3i & 2-i \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 1 & 3i \\ 2 & 2-i \end{bmatrix}$$

正則行列と逆行列 n 次正方行列 A に対し, 次をみたす n 次正方行列 X が存在するとき, A は **正則** (または**正則行列**) であるという:

$$(1.1) \quad AX = E_n = XA$$

逆行列の一意性 この様な X は, 存在すれば唯1つであることが次の様に示される: Y も (1.1) 式をみたすとする, 即ち X は $AX = E$, $XA = E$ を, Y も $AY = E$, $YA = E$ をみたすとする. このとき

$$Y = YE = Y(AX) = (YA)X = EX = X$$

となり, 唯1つしかない. (一意的であるという.) この行列 X を A の**逆行列**といい A^{-1} と表す. このとき (1.1) 式は

$$(1.2) \quad AA^{-1} = E = A^{-1}A$$

[**単位行列**] 単位行列 E は $EE = E$ より正則で, $E^{-1} = E$ である.

[**正則でない行列**] 正方行列 A のある行, またはある列が $\mathbf{0}$ ならば A は正則でない. なぜなら, A の第 i 行を $\mathbf{0}$ とすると $(AX)_{ii} = 0$ となり, $AX = E$ となる行列 X は存在しない. 列についても同様に, A の第 j 列を $\mathbf{0}$ とすると $(XA)_{jj} = 0$ となり, $XA = E$ となる行列 X は存在しない.

定理 1.2[逆行列の性質] A, B が n 次正則行列ならば, $A^{-1}, AB, {}^t A, \bar{A}, A^*$ はいずれも正則で, 逆行列は

$$(1) (A^{-1})^{-1} = A, \quad (2) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (3) ({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1}), \quad (4) (\bar{A})^{-1} = \overline(A^{-1}), \quad (5) (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

証明 A, B は正則なので逆行列 A^{-1}, B^{-1} は存在している。従って, C を $A^{-1}, AB, {}^t A$ 等とするとき, (1)-(5) 式の右辺を X とおいて $CX = E = XC$ をみたすことを確かめれば、逆行列の一意性より X は C の逆行列になる。

(1) $C = A^{-1}$, $X = A$ とおくと (1.2) 式より $CX = A^{-1}A = E = AA^{-1} = XC$.

(2) $C = AB$, $X = B^{-1}A^{-1}$ とおいて CX, XC を計算すると:

$$CX = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E. \quad XC = (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E.$$

(3) $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ の転置をとると, ${}^t(A^{-1}A) = {}^t(AA^{-1}) = {}^tE = E$. 一般に $({}^tB)({}^tA) = {}^t(AB)$ より,

$$CX = {}^tA({}^tA^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = E, \quad XC = {}^t(A^{-1}){}^tA = {}^t(AA^{-1}) = E. \quad (4), (5) \text{ も同様}.$$

(3),(4),(5) により、これらは単に ${}^tA^{-1}, \overline{A}^{-1}, A^{*-1}$ と表せる。

注 $A = {}^t({}^tA) = \overline{\overline{A}} = (A^*)^*$ なので、この定理の A を ${}^tA, \overline{A}, A^*$ に置き換えるれば、

「 ${}^tA, \overline{A}, A^*$ のいずれかが正則 $\Rightarrow A$ は正則」が成り立ち、この定理と合わせて、

- $A, {}^tA, \overline{A}, A^*$ のいずれかが正則 \Rightarrow これら全てが正則である。

また、命題「 $P \Rightarrow Q$ 」と対偶命題「 Q でない $\Rightarrow P$ でない」は同値なので、一方が示されると他方も示されたことになる。従って、

- AB が正則でない $\Rightarrow A, B$ のどちらかは正則でない。

- $A, {}^tA, \overline{A}, A^*$ のいずれかが正則でない \Rightarrow これら全ては正則でない。

帰納的に次が成り立つ: ${}^t(A_1A_2 \cdots A_k) = ({}^tA_k) \cdots ({}^tA_2)({}^tA_1)$, $(A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

注 一般に $AX = E$, または $XA = E$ をみたす正方行列が存在すれば A は正則で、 X は A の逆行列になることが第2章、第3章で示される。

正方行列 n 次正方行列 A, B には和、積が常に定義され、スカラー一倍、転置、複素共役、随伴行列をとる操作も含め演算結果はまた n 次正方行列になる。即ち、 n 次正方行列全体の集合 $M_n(\mathbb{C})$ はこれらの演算で閉じている。

正方行列のべき乗 正方行列 A を k 個掛け合わせた積 $AA \cdots A$ を A^k と表し、 A の k 乗（またはべき乗、累乗）という。（「べき」は、幂、または巾と書く。） $A^0 = E$ とし、 A が正則のときは $A^{-k} = (A^{-1})^k$ とする：

$$A^k A^\ell = A^{k+\ell} = A^\ell A^k, \quad (A^k)^\ell = A^{k\ell}. \quad ((AB)^2 = ABAB \text{ (一般には } \neq A^2 B^2 \text{).})$$

$A^k = O$ となる k があるとき A をべき零行列、 $A^2 = A$ となるとき A をべき等行列という。

有用な行列 正方行列 $A = [a_{ij}]$ は

- ${}^tA = A$ をみたすとき 対称行列 ($a_{ij} = a_{ji}$),
- $A^* = A$ をみたすとき エルミート (Hermite) 行列 ($a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (特に $a_{ii} \in \mathbb{R}$)),
- ${}^tA = -A$ をみたすとき 交代行列 ($a_{ij} = -a_{ji}$ (特に $a_{ii} = 0$)) という。また、
- $(A^*)A = E$ をみたすとき ユニタリー (Unitary) 行列 という。（上の注より $A^* = A^{-1}$.)
- 実行列であるユニタリー行列 ($(A^*)A = E, \overline{A} = A$) を直交行列 という。

例 次の行列は順に、対称行列、交代行列、エルミート行列、直交行列である。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & i & 2 \\ -i & 2 & 2i \\ 2 & -2i & 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

三角行列 行列の対角線より下の（または上の）成分が全て 0 である正方行列を上三角行列（または下三角行列）といい、総称して単に 三角行列 という。上三角行列 $A = [a_{ij}]$ ($i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$) は

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{略して} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & * \\ \ddots & \ddots \\ O & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & * \\ \ddots & \ddots \\ & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(* は 0 とは限らない成分が並んでいることを表す。)

特に、対角成分以外の成分が全て 0 である正方行列を対角行列 という。（上で * が O になる。）

単位行列の定数倍 aE は対角行列で、スカラー行列 という。対角行列は上三角かつ下三角行列で、対称行列でもある。

- 上三角行列同士の積は上三角行列になり、積の対角成分は対応する対角成分の積になる。下三角行列でも同様。

上三角行列の積

$$\begin{bmatrix} a_{11} & * \\ \ddots & \ddots \\ O & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & * \\ \ddots & \ddots \\ O & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & * \\ \ddots & \ddots \\ O & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

- 上(下)三角行列の転置行列は下(上)三角行列になる。

注 正方行列でない場合も上(下)三角行列ということがある。