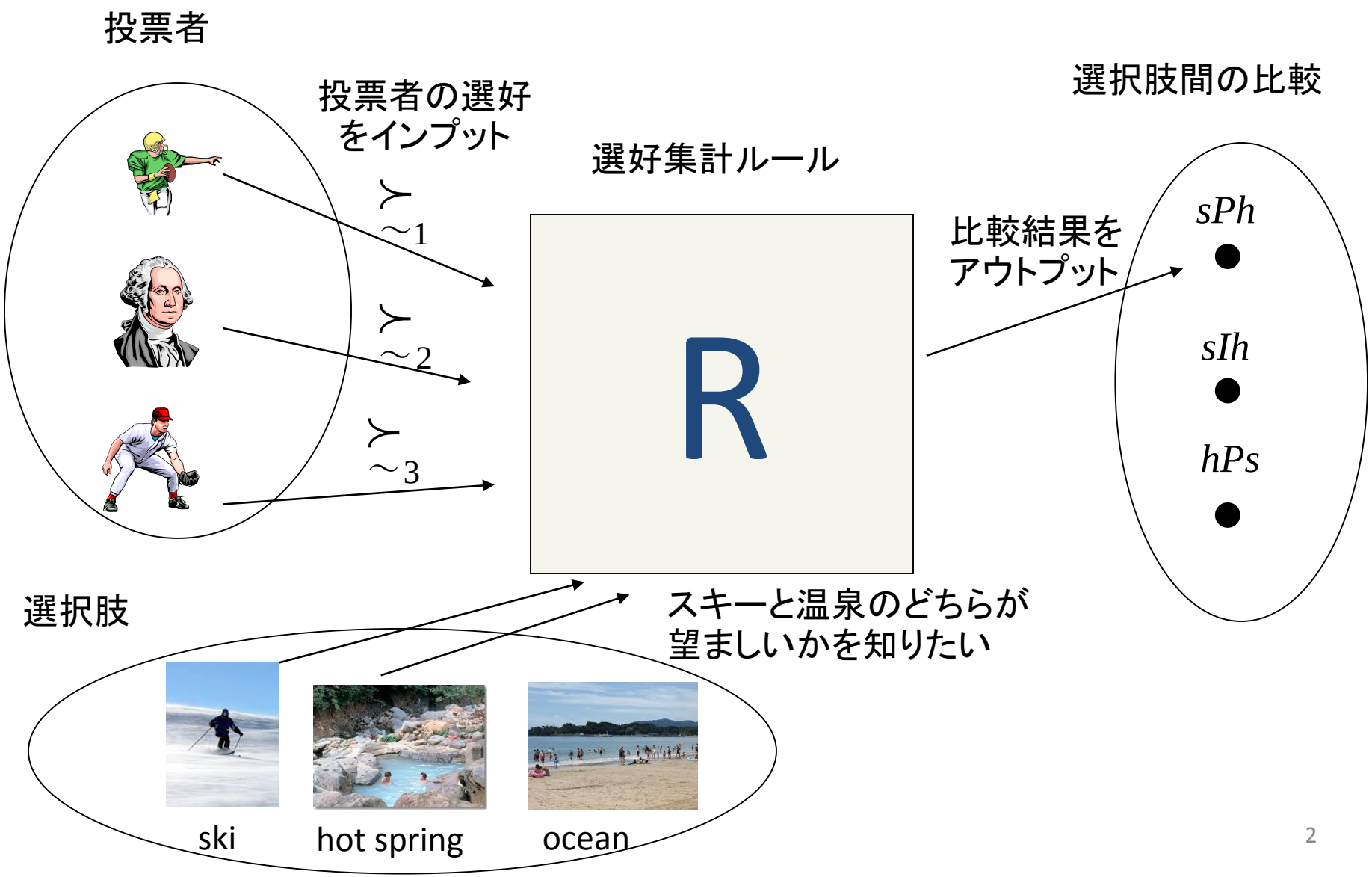
現代経済の諸問題
Ⅴ アローの不可能性定理

山邑紘史
(yamamura-h@soc.titech.ac.jp)

選好集計ルール


投票者
投票者の選好
をインプット
$\succsim_1$
$\succsim_2$
$\succsim_3$
選好集計ルール
R
比較結果を
アウトプット
選択肢間の比較
sPh
sIh
hPs
選択肢
スキーと温泉のどちらが
望ましいかを知りたい
ski
hot spring
ocean

投票のパラドクス

- 多数決ルール, R_M

  各選択肢 $x, y \in A$ に対して

  $$xR_M y \Leftrightarrow \#\{i \in N : x \succ_i y\} \geq \#\{i \in N : y \succ_i x\}$$

- 投票のパラドクス（集計ルール）

  多数決ルールに基づいて選好を集計すると,

  [ ]をみたさない集計結果が発生しうる

・・・集計結果が完備性・推移性をみたすことを要求すると, 何が生じるのか？

社会厚生関数

- 選好集計ルールRの内，完備性・推移性をみたすものを

  と呼ぶ。
- 完備性
  - 任意の $x, y \in A$ について，xRy もしくはyRx の少なくとも一方がなりたつ。
- 推移性
  - 任意の $x, y, z \in A$について，xRy かつ yRz ならば，xRzがなりたつ。

社会厚生関数Rが有すべき性質

1. 定義域の非限定性 (UD: Unrestricted Domain)

・・・あらゆる状況において，選択肢間の望ましさを比較することができる。

社会厚生関数 R が有すべき性質

2. パレート原理 (PP: Pareto Principle)

・・・投票者全員の選好が一致した際には，必ずその選好は集計結果に反映される。

社会厚生関数 Rが有すべき性質

3. 無関連対象からの独立性 (IIA: Independence of Irrelevant Alternatives):

・・・2選択肢x,y間の社会的評価は，各投票者のx,y間の選好のみに応じて決定される。

社会厚生関数Rが有すべき性質

4. 非独裁制 (ND: Non Dictatorship)

・・・ある投票者の一存が常に集計結果に反映されることはない。

アローの不可能性定理

$\#A \geq 3$ のとき,「定義域の非限定性」「パレート原理」「無関連対象からの独立性」「非独裁制」の4条件をみたす社会厚生関数は存在しない。

アローの不可能性定理の証明

- 簡単化のため，
  - 2投票者
  - 3選択肢
  - 強選好

  を仮定する。
- 選択肢の数が3個のとき，強選好は6通り存在する。

⇒6 × 6 = 36 通りの選好組に対する集計結果を考えればよい。