

ギバード・サタースウェイトの定理の証明

(表 0)

$\begin{matrix} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{matrix}$	$x > y > z$	$x > z > y$	$y > x > z$	$y > z > x$	$z > x > y$	$z > y > x$
$x > y > z$	x	x	x or y	x or y	x or z	
$x > z > y$	x	x	x or y		x or z	x or z
$y > x > z$	x or y	x or y	y	y		y or z
$y > z > x$	x or y		y	y	y or z	y or z
$z > x > y$	x or z	x or z		y or z	z	z
$z > y > x$		x or z	y or z	y or z	z	z

(Step 1) パレート原理に沿って選択肢を絞り込む。

(Step 2) 1行3列に注目。以下の2通りのケースを考える。

ケース 1: x を仮定する。

ケース 2: y を仮定する。

ギバード・サタースウェイトの定理の証明

(表 1-1)

2 1	$x > y > z$	$x > z > y$	$y > x > z$	$y > z > x$	$z > x > y$	$z > y > x$
$x > y > z$	x	x	x	x or y	x or z	x or z
$x > z > y$	x	x	x or y		x or z	x or z
$y > x > z$	x or y	x or y	y	y		y or z
$y > z > x$	x or y		y	y	y or z	y or z
$z > x > y$	x or z	x or z		y or z	z	z
$z > y > x$		x or z	y or z	y or z	z	z

ケース 1: 1 行 3 列において x を仮定する。

- ① 仮に 1 行目において y となるケースが存在すれば、1 の表明された選好が $x > y > z$, 2 の真の選好が $y > x > z$ のとき、2 は戦略的投票を通じて y を選択することが可能
 \Rightarrow 1 行目において y が選ばれることはない

ギバード・サタースウェイトの定理の証明

(表 1-2)

<div style="display: inline-block; border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"> $\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$ </div>	$x > y > z$	$x > z > y$	$y > x > z$	$y > z > x$	$z > x > y$	$z > y > x$
$x > y > z$	x	x	x	x	x or z	x or z
$x > z > y$	x	x	x or y		x or z	x or z
$y > x > z$	x or y	x or y	y	y		y or z
$y > z > x$	x or y		y	y	y or z	y or z
$z > x > y$	x or z	x or z		y or z	z	z
$z > y > x$		x or z	y or z	y or z	z	z

ケース 1: 1 行 3 列において x を仮定する。

- ① 仮に 1 行目において y となるケースが存在すれば, 1 の表明された選好が $x > y > z$, 2 の真の選好が $y > x > z$ のとき, 2 は戦略的投票を通じて y を選択することが可能
 \Rightarrow 1 行目において y が選ばれることはない
- ② 仮に 1 行目において z となるケースが存在すれば, 1 の表明された選好が $x > y > z$, 2 の真の選好が $y > z > x$ のとき, 2 は戦略的投票を通じて z を選択することが可能
 \Rightarrow 1 行目において z が選ばれることはない

ギバード・サタースウェイトの定理の証明

(表 1-3)

$\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array}$	$x > y > z$	$x > z > y$	$y > x > z$	$y > z > x$	$z > x > y$	$z > y > x$
$x > y > z$	x	x	x	x	x	x
$x > z > y$	x	x	$x \text{ or } y$	x	$x \text{ or } z$	$x \text{ or } z$
$y > x > z$	x or y	x or y	y	y		y or z
$y > z > x$	x or y		y	y	y or z	y or z
$z > x > y$	x or z	x or z		y or z	z	z
$z > y > x$		x or z	y or z	y or z	z	z

ケース 1: 1 行 3 列において x を仮定する。

- ① 仮に 1 行目において y となるケースが存在すれば, 1 の表明された選好が $x > y > z$, 2 の真の選好が $y > x > z$ のとき, 2 は戦略的投票を通じて y を選択することが可能
 \Rightarrow 1 行目において y が選ばれることはない
- ② 仮に 1 行目において z となるケースが存在すれば, 1 の表明された選好が $x > y > z$, 2 の真の選好が $y > z > x$ のとき, 2 は戦略的投票を通じて z を選択することが可能
 \Rightarrow 1 行目において z が選ばれることはない
- ③ 仮に 2 行目において y もしくは z となるケースが存在すれば, 1 の真の選好が $x > z > y$ のときに $x > z > y$ と表明することで, より望ましい x を選択することが可能
 \Rightarrow 2 行目において y もしくは z が選ばれることはない

ギバード・サタースウェイトの定理の証明

(表 1-4)

$\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array}$	$x > y > z$	$x > z > y$	$y > x > z$	$y > z > x$	$z > x > y$	$z > y > x$
$x > y > z$	x	x	x	x	x	x
$x > z > y$	x	x	x	x	x	x
$y > x > z$	x or y	x or y	y	y		y or z
$y > z > x$	x or y		y	y	y or z	y or z
$z > x > y$	x or z	x or z		y or z	z	z
$z > y > x$		x or z	y or z	y or z	z	z

ケース 1: 1 行 3 列において x を仮定する。

- ① 仮に 1 行目において y となるケースが存在すれば, 1 の表明された選好が $x > y > z$, 2 の真の選好が $y > x > z$ のとき, 2 は戦略的投票を通じて y を選択することが可能
 \Rightarrow 1 行目において y が選ばれることはない
- ② 仮に 1 行目において z となるケースが存在すれば, 1 の表明された選好が $x > y > z$, 2 の真の選好が $y > z > x$ のとき, 2 は戦略的投票を通じて z を選択することが可能
 \Rightarrow 1 行目において z が選ばれることはない
- ③ 仮に 2 行目において y もしくは z となるケースが存在すれば, 1 の真の選好が $x > z > y$ のときに $x > z > y$ と表明することで, より望ましい x を選択することが可能
 \Rightarrow 2 行目において y もしくは z が選ばれることはない
- ④ 仮に 3 行 6 列において z が選ばれるならば, 1 の真の選好が $y > x > z$, 2 の表明された選好が $z > y > x$ のとき, 1 は $x > y > z$ と表明することで, より望ましい x を選択可能
 \Rightarrow 3 行 6 列においては y が選択される

ギバード・サタースウェイトの定理の証明

(表 1-5)

$\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array}$	$x > y > z$	$x > z > y$	$y > x > z$	$y > z > x$	$z > x > y$	$z > y > x$
$x > y > z$	x	x	x	x	x	x
$x > z > y$	x	x	x	x	x	x
$y > x > z$	x or y	x or y	y	y	y	y
$y > z > x$	x or y	y	y	y	y or z	y or z
$z > x > y$	x or z	x or z		y or z	z	z
$z > y > x$		x or z	y or z	y or z	z	z

ケース 1: 1 行 3 列において x を仮定する。

- ① 仮に 1 行目において y となるケースが存在すれば, 1 の表明された選好が $x > y > z$, 2 の真の選好が $y > x > z$ のとき, 2 は戦略的投票を通じて y を選択することが可能
 \Rightarrow 1 行目において y が選ばれることはない
- ② 仮に 1 行目において z となるケースが存在すれば, 1 の表明された選好が $x > y > z$, 2 の真の選好が $y > z > x$ のとき, 2 は戦略的投票を通じて z を選択することが可能
 \Rightarrow 1 行目において z が選ばれることはない
- ③ 仮に 2 行目において y もしくは z となるケースが存在すれば, 1 の真の選好が $x > z > y$ のときに $x > z > y$ と表明することで, より望ましい x を選択することが可能
 \Rightarrow 2 行目において y もしくは z が選ばれることはない
- ④ 仮に 3 行 6 列において z が選ばれるならば, 1 の真の選好が $y > x > z$, 2 の表明された選好が $z > y > x$ のとき, 1 は $x > y > z$ と表明することで, より望ましい x を選択可能
 \Rightarrow 3 行 6 列においては y が選択される
- ⑤ ①～③の議論と同様にして, 3 行目及び 4 行目において x もしくは z が選ばれないことが示せる

ギバード・サタースウェイトの定理の証明

(表 1-5)

2 1	$x > y > z$	$x > z > y$	$y > x > z$	$y > z > x$	$z > x > y$	$z > y > x$
$x > y > z$	x	x	x	x	x	x
$x > z > y$	x	x	x	x	x	x
$y > x > z$	y	y	y	y	y	y
$y > z > x$	y	y	y	y	y	y
$z > x > y$	x z	x z	z	y z	z	z
$z > y > x$	z	x z	y z	y z	z	z

ケース 1: 1 行 3 列において x を仮定する。

- ① 仮に 1 行目において y となるケースが存在すれば, 1 の表明された選好が $x > y > z$, 2 の真の選好が $y > x > z$ のとき, 2 は戦略的投票を通じて y を選択することが可能
 \Rightarrow 1 行目において y が選ばれることはない
 - ② 仮に 1 行目において z となるケースが存在すれば, 1 の表明された選好が $x > y > z$, 2 の真の選好が $y > z > x$ のとき, 2 は戦略的投票を通じて z を選択することが可能
 \Rightarrow 1 行目において z が選ばれることはない
 - ③ 仮に 2 行目において y もしくは z となるケースが存在すれば, 1 の真の選好が $x > z > y$ のときに $x > z > y$ と表明することで, より望ましい x を選択することが可能
 \Rightarrow 2 行目において y もしくは z が選ばれることはない
 - ④ 仮に 3 行 6 列において z が選ばれるならば, 1 の真の選好が $y > x > z$, 2 の表明された選好が $z > y > x$ のとき, 1 は $x > y > z$ と表明することで, より望ましい x を選択可能
 \Rightarrow 3 行 6 列においては y が選択される
 - ⑤ ①～③の議論と同様にして, 3 行目及び 4 行目において x もしくは z が選ばれないことが示せる
 - ⑥ ④～⑤の議論と同様にして, 5 行目及び 6 行目において x もしくは y が選ばれないことが示せる
- \Rightarrow 投票者 1 が独裁者の独裁ルールが導出される ■

ギバード・サタースウェイトの定理の証明

(表 2)

$\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$	$x > y > z$	$x > z > y$	$y > x > z$	$y > z > x$	$z > x > y$	$z > y > x$
$x > y > z$	x	x	y	x or y	x or z	x or z
$x > z > y$	x	x	x or y		x or z	x or z
$y > x > z$	x or y	x or y	y	y		y or z
$y > z > x$	x or y		y	y	y or z	y or z
$z > x > y$	x or z	x or z		y or z	z	z
$z > y > x$		x or z	y or z	y or z	z	z

ケース 2 : 1 行 3 列において y を仮定する。(以下の証明は宿題)