2015 年度 数理経済学 中間試験問題［50 点満点］

2015 年 12 月 10 日(木)10 時 45 分～12 時 10 分（85 分）

学科（ひとつに丸）　　社工　　経営　　その他

学籍番号

名前

※問題は問１から問４まである.
※A4 用紙を持ち込んでいる場合には，名前と学籍番号を書いて必ず提出すること.

試験終了後に成績を知りたい場合は，下記に 2 桁の数字を書いてください.
ただし，各桁共に１～９のみを使い，０は使わないこと.
採点終了後に，この数字に試験の得点を加算したものをメールにて報告します.
なお，不合格の場合は必ずメールにて連絡する予定です.

問１

（１）以下のグラフの最小全域木を，クラスカルのアルゴリズムおよびプリムのアルゴリズムを用いて計算せよ．**最小全域木の枝を太線で描く**と共に，最小全域木の各枝に対して**追加された順番**を書けば良い．プリムのアルゴリズムでは，**頂点Sを根とすること**.

（２）全域木の定義を書け.

上記で述べた全域木の定義を踏まえて，以下の証明問題に答えよ．証明を書く際には，定義で述べた条件がどこで使われているか，わかるようにせよ.

（３）最小全域木 T^*，およびそれに含まれる枝(u,v)について考える.

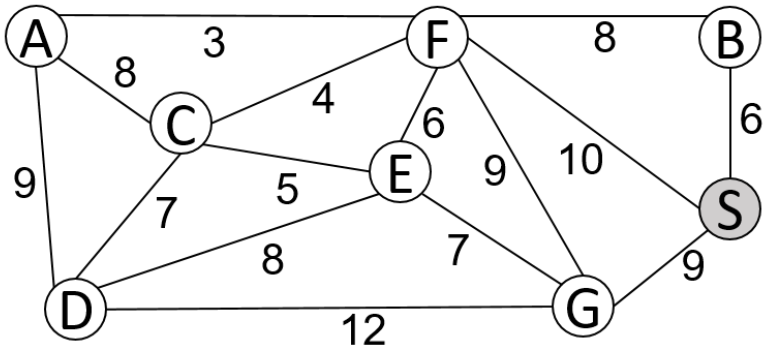
（３－１）全域木T^*に対し，枝(u,v)を削除すると，非連結になることを証明せよ.

（３－２）全域木T^*に対し，枝(u,v)を削除すると，ちょうど２つの連結成分が得られるが，それらの頂点集合をV',V'' とおく．カットセット$E(V',V'')$の任意の枝(s,t)に対し，T^*から枝(u,v)を削除し，(s,t)を追加した枝集合が再び全域木になることを証明せよ.

（３－３）枝(u,v)はカットセット$E(V',V'')$ の中で費用最小の枝であることを証明せよ.

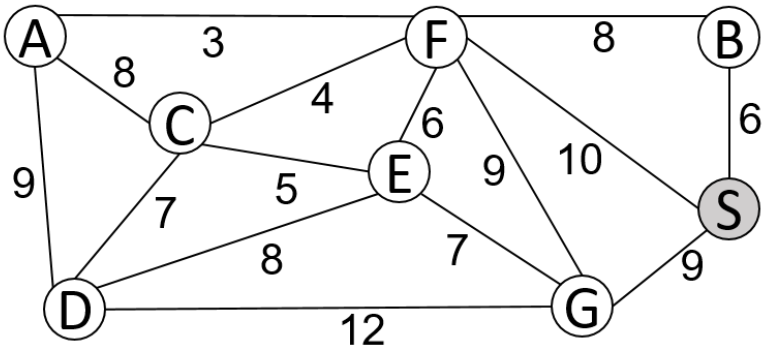
解答欄

（１）クラスカルのアルゴリズムの実行結果



プリムのアルゴリズムの実行結果

（**頂点Sを根とすること**）



解答欄

問 2

下記の差分不等式系の解の有無を判定するために，最短路問題に帰着して計算する．

$$x_b - x_a \leq -1,\ x_a - x_b \leq 3,\ x_c - x_a \leq 1,\ x_a - x_c \leq 2,$$
$$x_c - x_b \leq -3,\ x_d - x_c \leq 4,\ x_c - x_d \leq 6$$

（１）この不等式系に対応するグラフを書け．各枝にはその長さも書くこと．

（ヒント：変数に対応しない新たな頂点 s は不要）

（２）このグラフにおける，始点から各頂点への最短路長を，ベルマン・フォードのアルゴリズムを使って計算せよ．計算の過程として，各 k=0, 1, 2, . . . に対し，k 回目の反復における，各頂点への枝数 k 以下の最短路長を書くこと．

（３）上記の結果を基にして，解が存在するならばその解を書け．解が存在しないならばその証拠を書け．

解答欄

解答欄

問 3

以下の問では，各枝(u,v)に長さ$\ell(u,v)$の与えられた有向グラフを考える．

（1）頂点 s から各頂点 v への最短路長を$d(v)$とおく．このとき，グラフの各枝(u,v)に対し，$d(v) \leqq d(u) + \ell(u,v)$が成り立つことを証明せよ．ただし，最短路長の値は全て有限値とする．

（2）グラフの負閉路の定義を書け．

（3）各頂点vに対して割り当てられた実数値 $p(v)$ について考える．このとき，各枝(u,v)に対して$p(v) - p(u) \leqq \ell(u,v)$が成り立つならば，負閉路が存在しないことを証明せよ．

解答欄

解答欄

問４

（１）グラフのマッチングの定義，および頂点被覆の定義を書け．

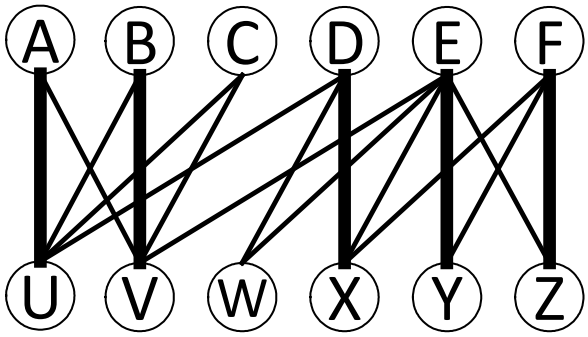
（２）一般グラフにおける最大マッチングMの枝数$|M|$と頂点被覆Sの頂点数$|S|$に対し，
$|M| \leq |S|$が成り立つことを証明せよ．

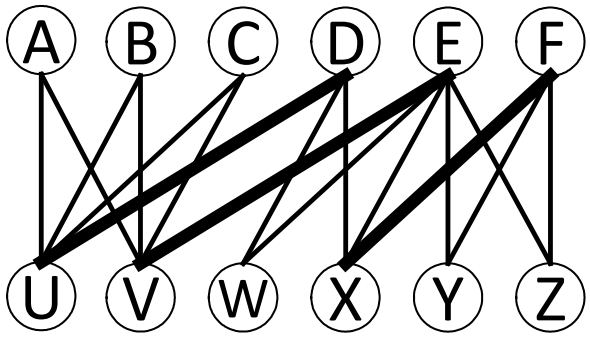
（３）右ページ上図の二部グラフのマッチング（マッチングの枝は太い線で表現）について考える．
それぞれ，最大マッチングならば，証拠としてそのグラフの最小頂点被覆を求めよ．
最大マッチングでなければ，増加路をひとつ求めよ．いずれも結果のみ書けば良い．

（４）右ページ下図の二部グラフの最大重みマッチングを，最大重み増加路を用いたアルゴリズムを使って計算せよ．各反復で得られたマッチングと，用いた最大重み増加路を明記すれば良い．

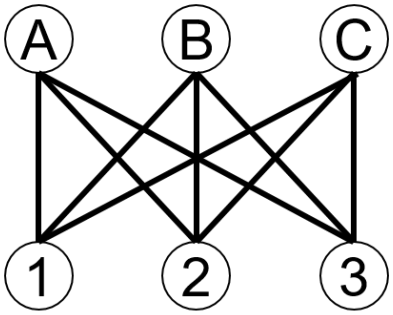
（１），（２）の解答欄

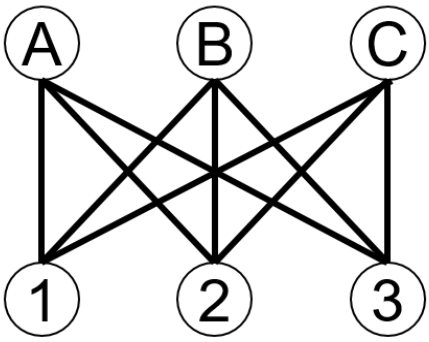
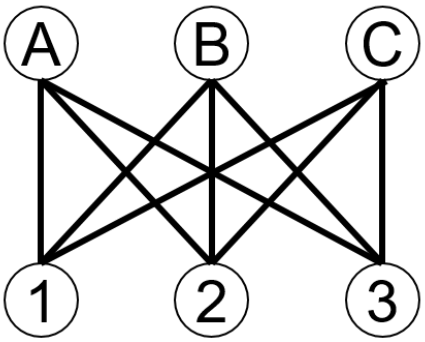
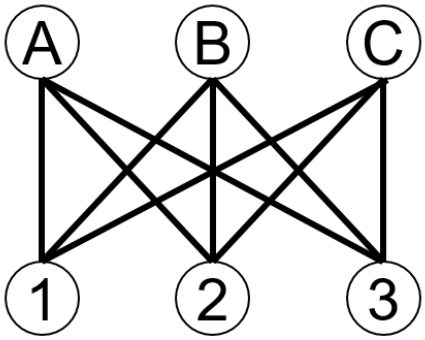
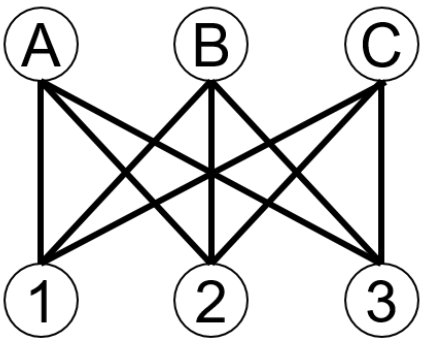
（3）の解答欄





（4）の解答欄
グラフと各枝の重みは
右の通り.



$w(i,j)$	A	B	C
①	5	3	0
②	6	5	4
③	0	3	1

解答用の図