数理経済学
第1回
ガイダンス，最小全域木問題

塩浦昭義
東京工業大学 社会工学専攻 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp
http://www.soc.titech.ac.jp/~shioura/teaching

この講義の目的

× 「数理経済学」を学ぶ
　(経済の数理モデルを作り，数学的に解析する分野)
○ 経済・経営工学に役立つ数理を学ぶ

より具体的には．．．
- 離散的な最適解・安定解を求める問題を紹介
  - 経済では，連続的な財だけでなく，離散的な財も扱う！
- 問題の数理構造，アルゴリズムを説明
- 経済学・経営工学との繋がりを紹介

今後の予定

本年度「最適化基礎」の内容と一部重複します

- 10/22 第1回目--- ガイダンス，最小全域木問題（最適解を求める1）
- 10/29 第2回目--- 最小全域木問題（最適解を求める2）
- 11/05 第3回目--- 最短路問題（最適解を求める3）
- 11/12 第4回目--- 最大要素マッチング問題（最適解を求める4）
- 11/19 第5回目--- 最大重みマッチング問題（最適解を求める5）
- 11/26 第6回目--- 資源配分問題（最適解を求める6）
- 12/03 第7回目--- ナップサック問題，巡回セールスマン問題（近似解を求める）
- 12/10 第8回目--- 中間試験
- 12/17 第9回目--- 財の交換問題（安定解を求める1）
- 12/24 第10回目--- 財の交換問題（安定解を求める2）
- 2016/01/07 第11回目--- 1対1安定マッチング問題（安定解を求める3）
- 01/14 --- 金曜日授業のため，講義はありません
- 01/21 第12回目--- 1対1安定マッチング問題（安定解を求める4）
- 01/28 第13回目--- 1対多安定マッチング問題（安定解を求める5）
- 02/04 第14回目--- 期末試験

授業の進め方

- 毎回の授業の流れ
  前回授業のレポートの解説 è 講義 è レポート問題の出題
- レポートは各自で採点後，提出してもらいます（赤ペン持参のこと）
- レポート提出は任意．ただし，各試験前までに1回は提出義務あり
  - レポート未提出の場合は中間・期末試験の受験不可
  - 問題の解答が**不完全でも良い**ので，何か書いて出してください

- 授業資料はスライド1枚目のWebページとOCWに置きます
- 質問等はメール（簡単な質問の場合）
  または直接訪問（とくに成績に関する問合せの場合）してください

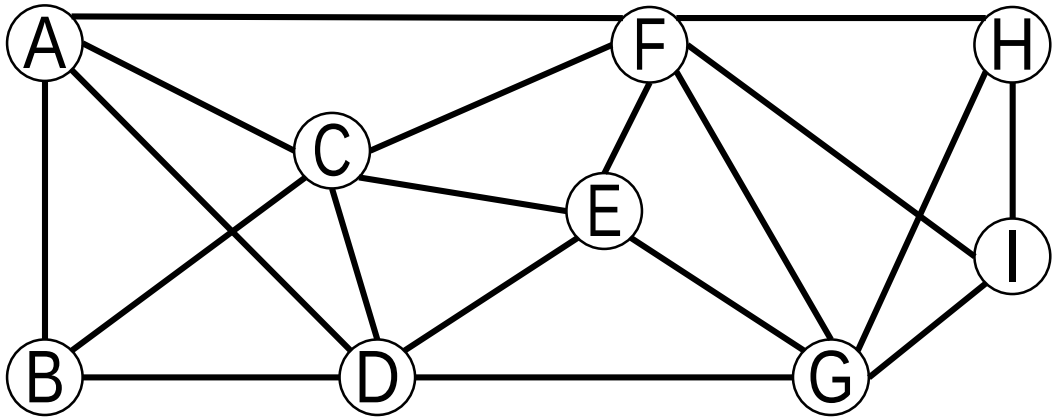
成績の評価方法

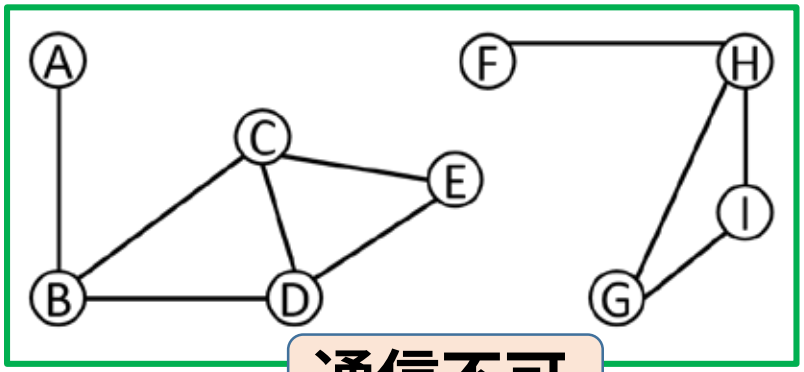
- 中間５０%, 期末５０% ＋ レポートの提出状況 è 100点満点で採点
  - 全体で59点以下は不合格
- 中間試験および期末試験のできが悪くても不合格
  - それぞれ50点満点
  - 30点以上合格
  - 29点以下は不合格 (試験とレポートの状況次第で救済あり)

最小全域木の例：通信ネットワークの構築

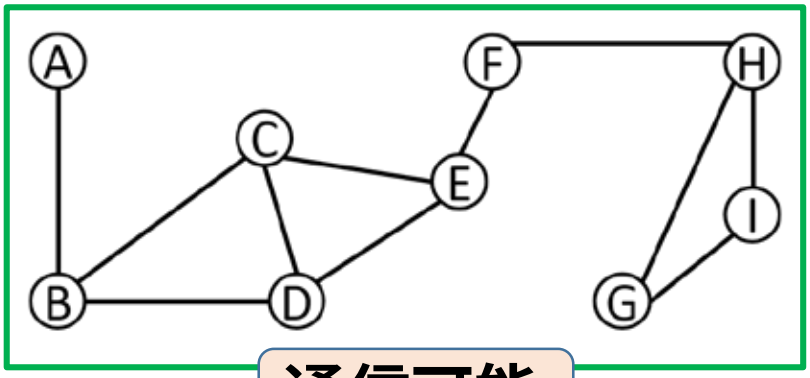
- 大学内の通信用ネットワークを構築したい
  - 地点 A, B, ..., I をケーブルで接続，互いに通信したい
  - 直接ケーブルで接続できるところ，できないところがある
  - 複数のケーブルで繋がっていても可

接続可能な地点





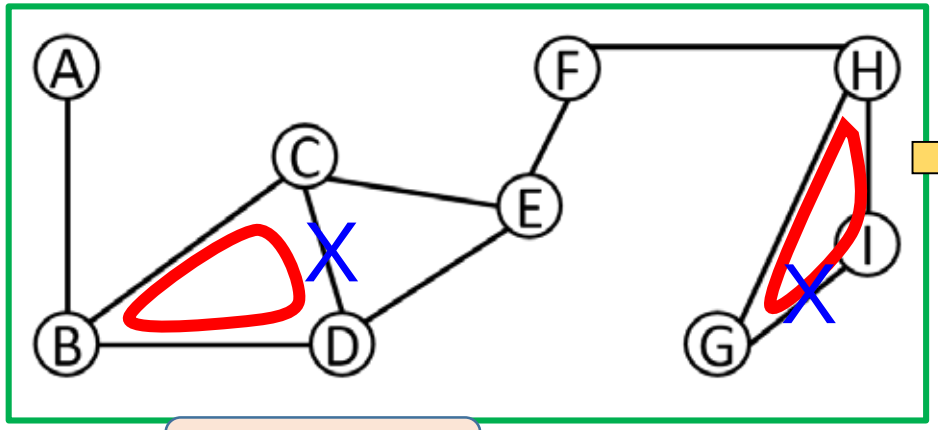
通信不可



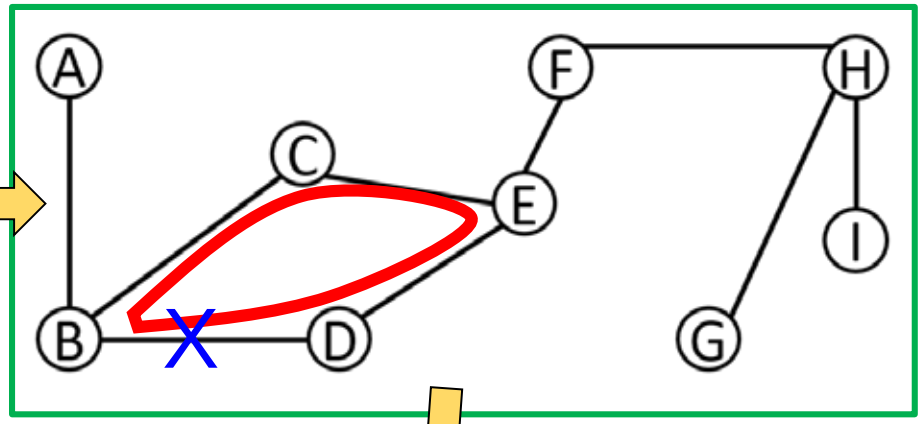
通信可能

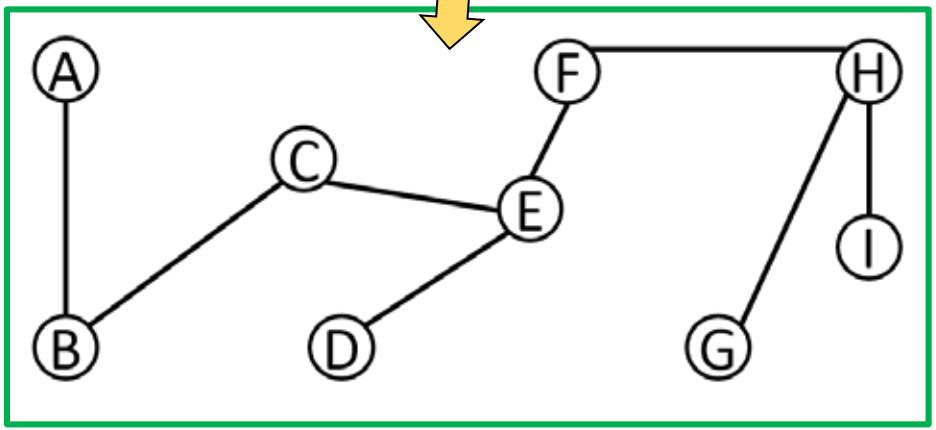
無駄を省いたネットワーク

- 通信できればＯＫ
  - 無駄なケーブルはできる限り省く
  - ケーブルで一周できる è 周上の各地点に2系統の通信路
    è ケーブルをひとつ削除しても通信可



通信可能

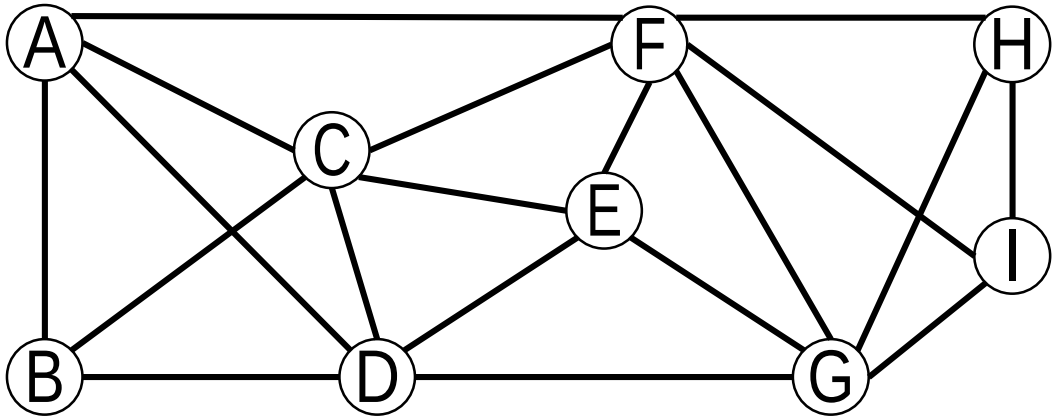




グラフ

- 定義：グラフ＝「丸」を「線」で結んだ図
  - 頂点＝「丸」，枝＝「線」

グラフの例
- 友人関係の図
- 鉄道路線図，道路網
- 組織図，家系図

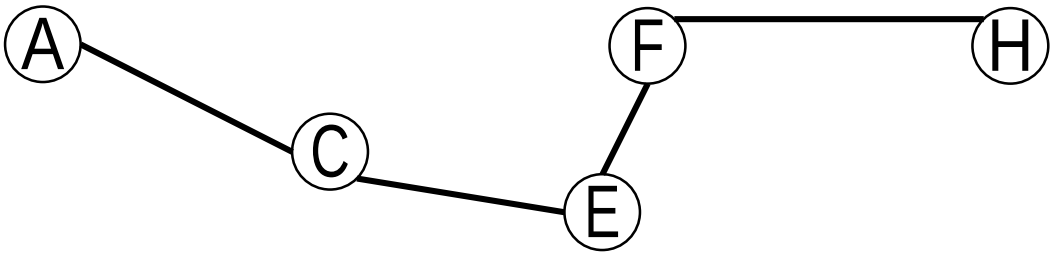


※数学的には，
グラフ$G = (V, E)$は全頂点の集合V と全枝の集合E の対として表現
各枝$(u, v) \in E$は頂点の対として表現

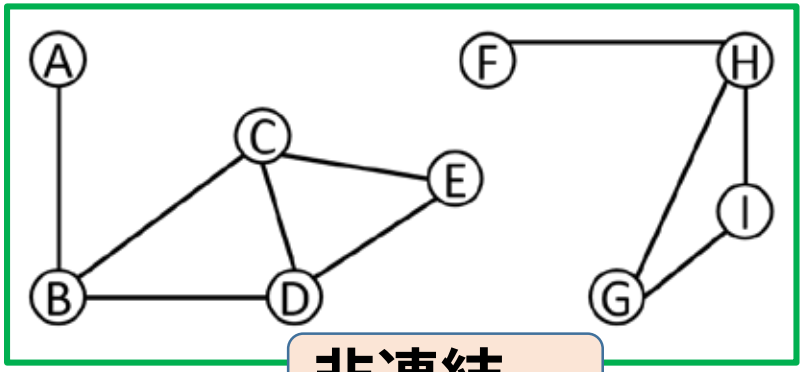
上記のグラフの場合，
すべての頂点の集合$V = \{A, B, C, \ldots, H, I\}$
すべての枝の集合$E = \{(A, B), (B, C), (C, D), (B, D) \ldots\}$

グラフの路と閉路

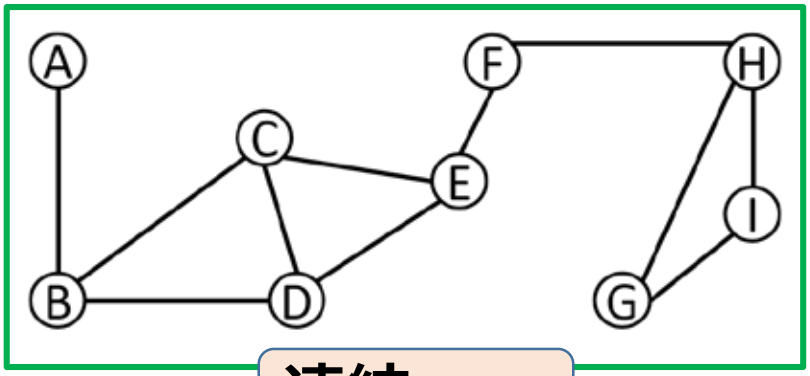
- **定義**：**路（みち）**（path, **パス**）＝複数の枝が1つにつながったもの



- **定義**：**グラフが連結**＝すべての頂点対の間に路が存在



非連結

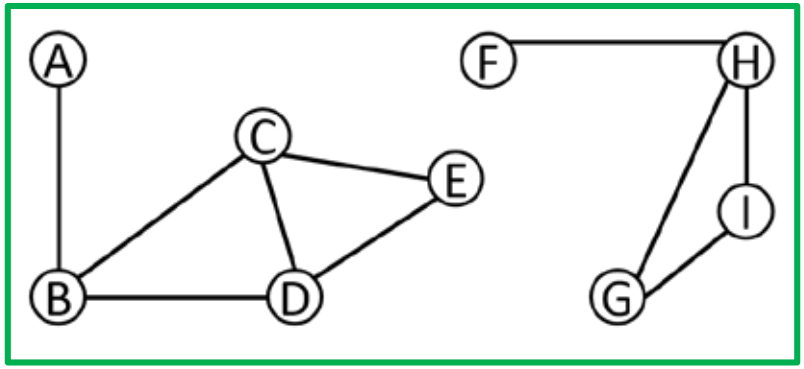


連結

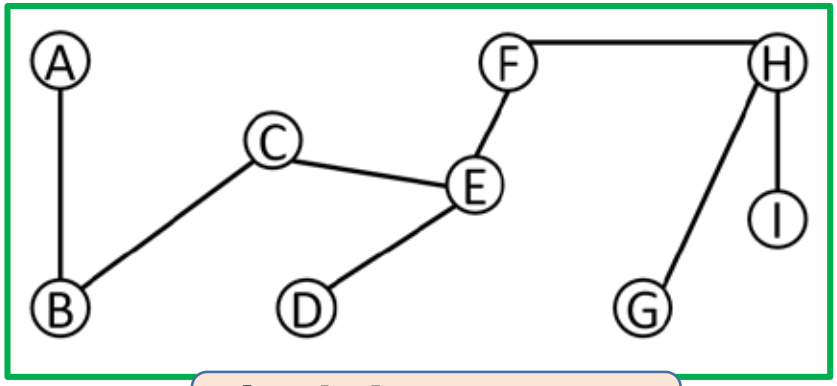
- **定義**：**閉路**（cycle, **サイクル**）＝複数の枝が1つの輪になったもの

グラフの全域木

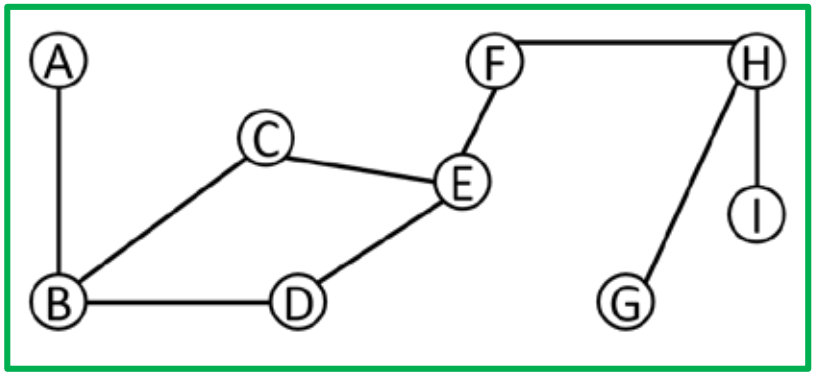
- グラフの全域木 --- 無駄のないネットワークのこと
- 定義：全域木＝次の条件を満たす枝の集合
  (i) 枝集合が連結
  (ii) 枝集合が閉路を含まない

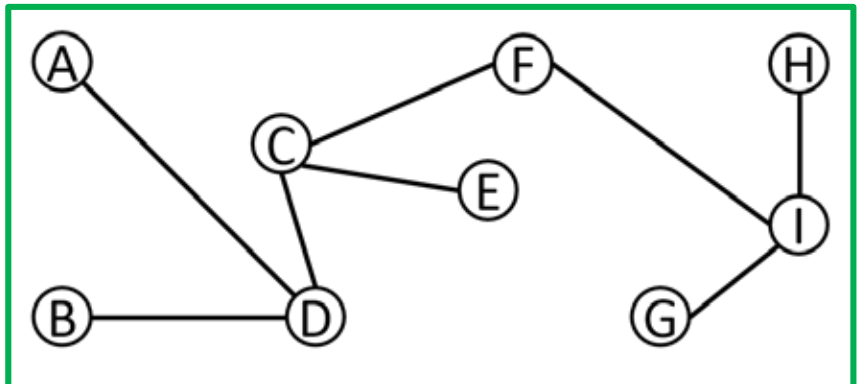


全域木ではない



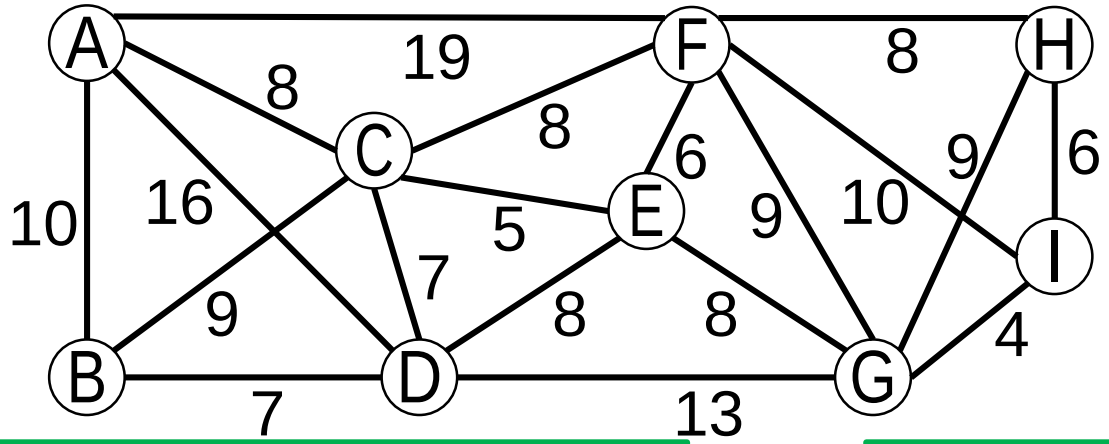
全域木である



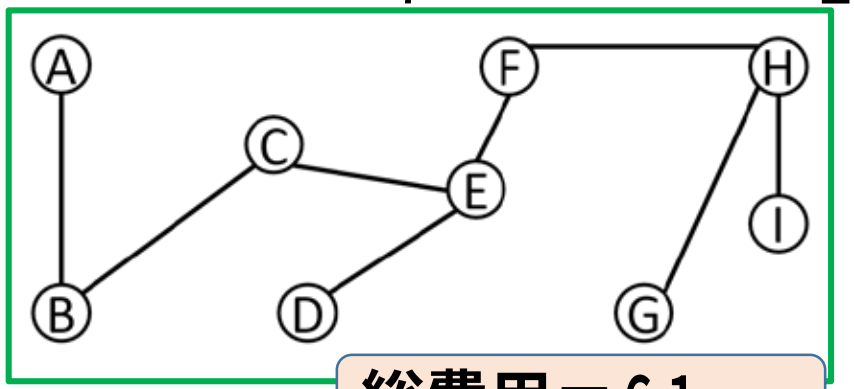


最小全域木問題

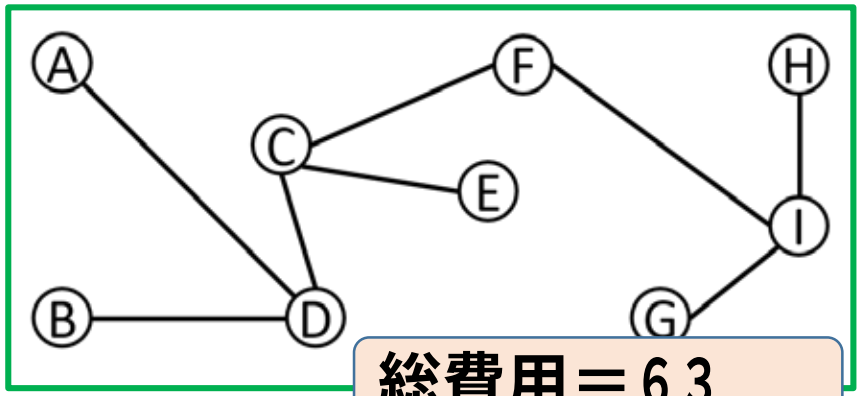
- 大学内の通信用ネットワークを構築したい
  - ケーブル(u,v)の設置には費用c(u,v) > 0が必要
  - 通信可能なネットワークを，出来るだけ最小費用でつくりたい
    è 費用の和が最小の全域木を求める問題 (**最小全域木問題**)



各ケーブルの設置費用



総費用＝61



総費用＝63

これから考えること

- どうやって，全域木を求めるか？
  - 「全域木」のことをよく理解する
    è 全域木の求め方がわかる

- どうやって，最小全域木を求めるか？
  - 「最小全域木」のことをよく理解する
    è 最小全域木の求め方がわかる

これから考えること

- どうやって，全域木を求めるか？
  - 「全域木」のことをよく理解する
    è 全域木の求め方がわかる

- どうやって，最小全域木を求めるか？
  - 「最小全域木」のことをよく理解する
    è 最小全域木の求め方がわかる

全域木の特徴付け

- **定義**：**全域木**＝次の条件を満たす枝の集合
  (i) 枝集合が連結
  (ii) 枝集合が閉路を含まない

定理: グラフGの任意の枝集合 $T \subseteq E$ に対し,
T は全域木 ç è |T| = |V| - 1, かつTは連結
ç è |T| = |V| - 1, かつTは閉路を含まない

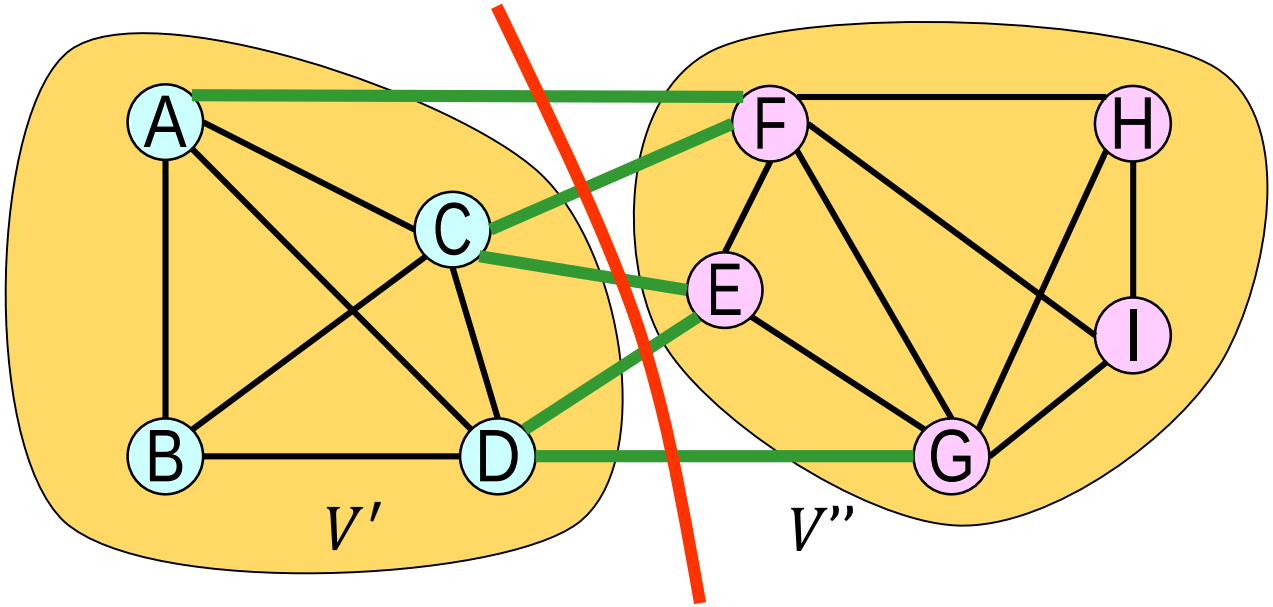
証明の概略：次の補題を使う

補題: (i) 枝集合 $T \subseteq E$ は連結 è |T| ≧ |V| - 1
(ii) |T| ≧ |V| è 枝集合 Tは閉路を含む

補題の証明の概略：(i) 対偶を示すと簡単
(ii) 実際に閉路を構成する手順を考える

グラフのカットセット

- V', V'': グラフの頂点集合の分割 (全ての頂点を2つに分けたもの)
- **定義**: V', V'' に関する**カットセット** $E(V', V'')$
  ç è V', V'' を結ぶ枝全ての集合



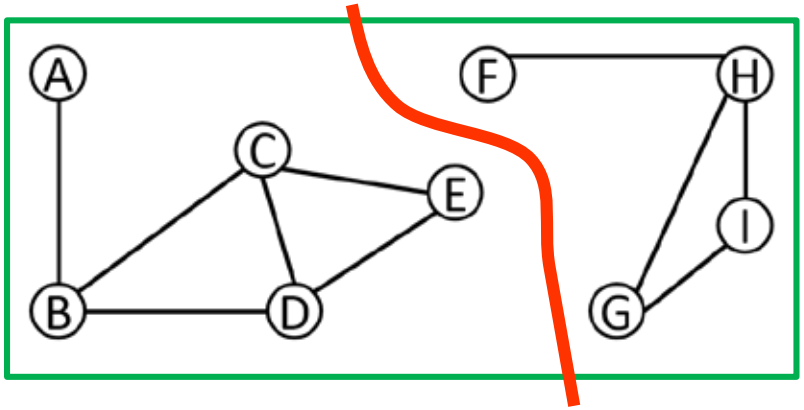
カットセットと連結性

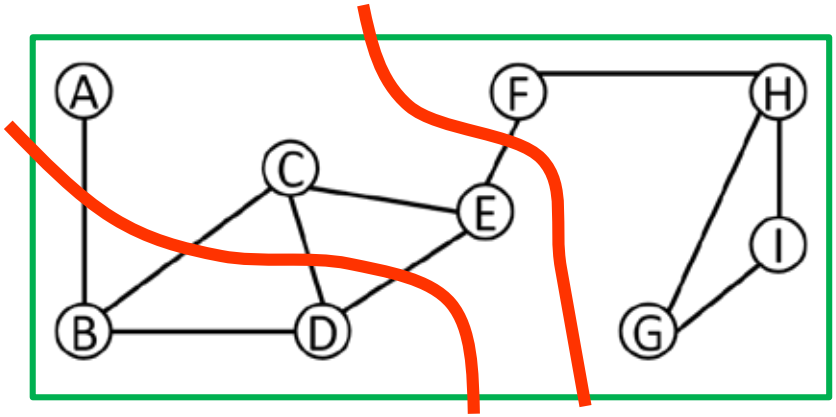
定理: Gの枝集合 $T \subseteq E$ に対し，次が成立：
T は連結 ç è 任意のカットセット$E(V', V'')$ に対し，
Tは$E(V', V'')$ の枝を1つ以上含む
（つまり，$T \cap E(V', V'') \neq \emptyset$）

証明の概略

[è] $u \in V', v \in V''$ を選ぶ à u と v はパスで繋がれている
à パスのいずれかの枝は$E(V', V'')$ の枝のはず

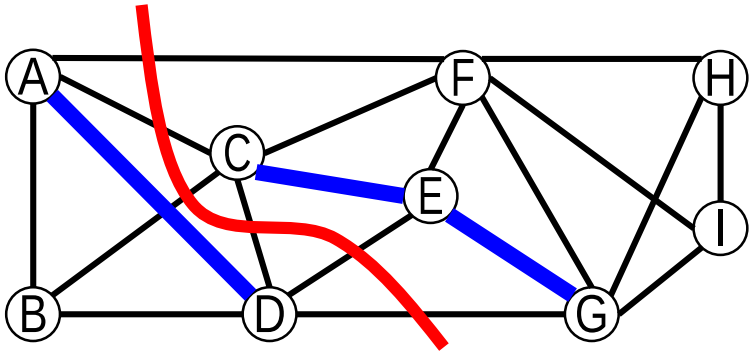
[ç] 対偶を証明：ある頂点 u と v はパスで繋がっていない
à u を含む連結成分 V' に対し，$T \cap E(V', V \setminus V') = \emptyset$

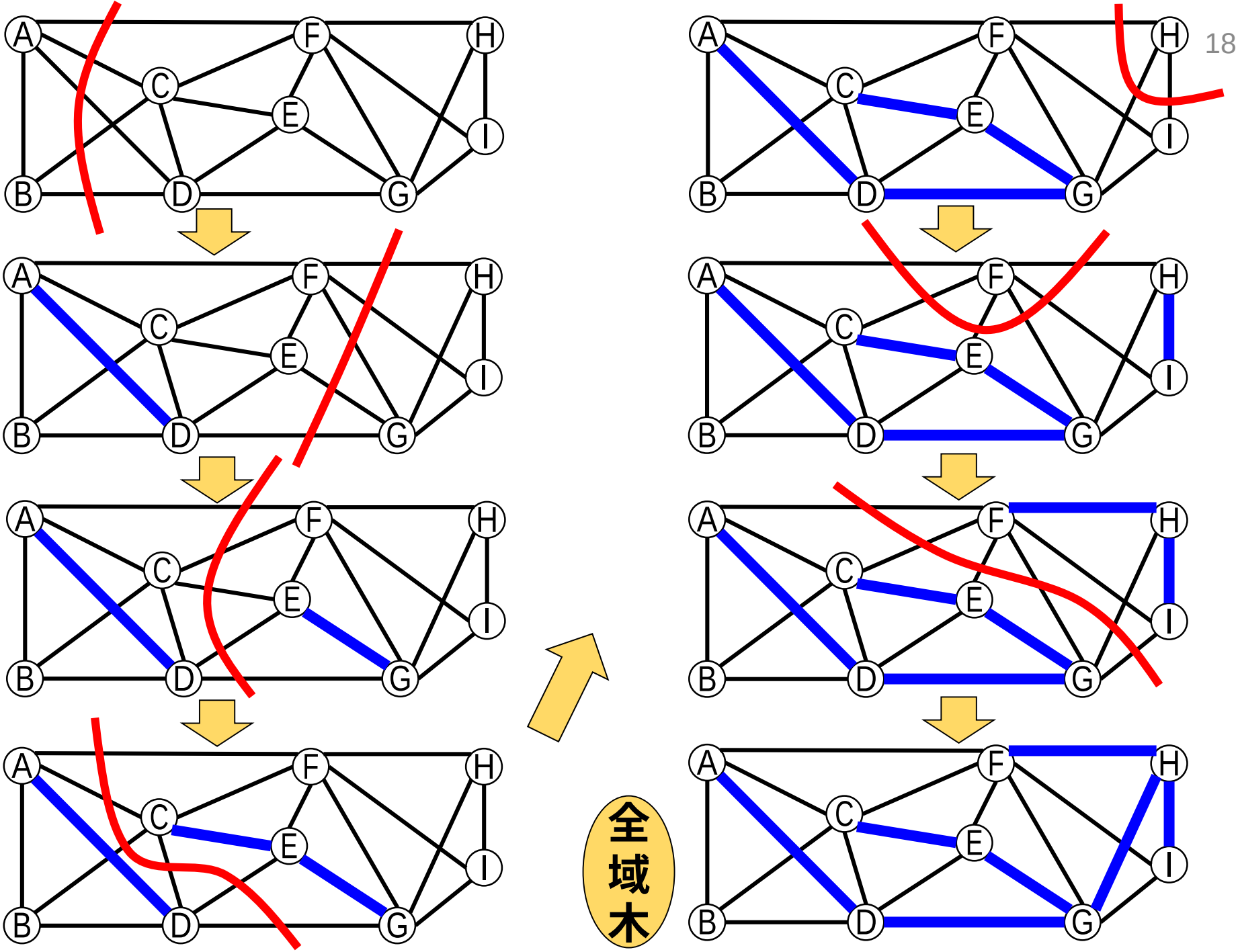




全域木の求め方

- グラフの枝を1つずつ選び，T に追加していく
- T が連結でない è あるカットセットの枝を T は含まない
  è そのカットセットの枝を追加する
- T が連結になったら終了（ç è 枝数が |V|-1 のとき）
- 途中で閉路ができないことに注意（なぜ？）




A
B
C
D
E
F
G
H
I
全域木

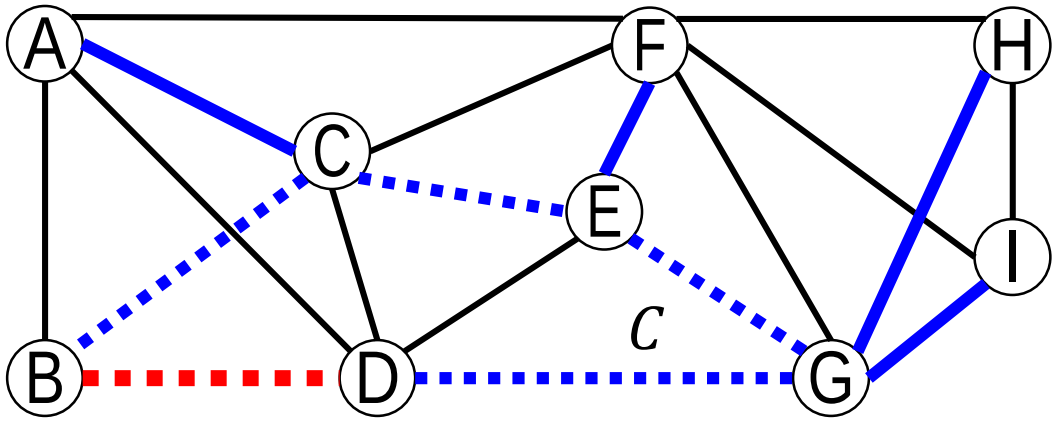
これから考えること

- どうやって，全域木を求めるか？
  - 「全域木」のことをよく理解する
    è 全域木の求め方がわかる

- どうやって，最小全域木を求めるか？
  - 「最小全域木」のことをよく理解する
    è 最小全域木の求め方がわかる

全域木に関する基本閉路

- 全域木 T へ, Tに含まれない枝 (u,v) をひとつ追加
  è u と v の間には路が存在するので, 閉路ができる
  (T と (u,v) に関する基本閉路)

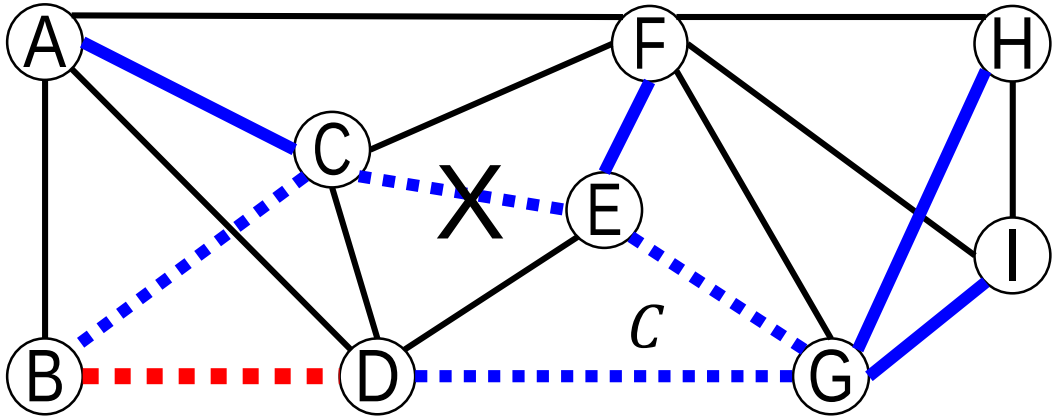


青い全域木 (太い枝) と枝(B,D)に関する基本閉路
＝点線の枝集合

基本閉路と全域木

性質：全域木 T，Tに含まれない枝 (u,v),
T と (u,v) に関する基本閉路の枝 (s,t) に対し，
T'=T+(u,v)-(s,t) は全域木になる

証明の概略：T' が閉路を含まず，連結であることを示せば良い



青い全域木（太い枝）に枝(B,D)を追加，(C,E)を削除
è　新しい全域木

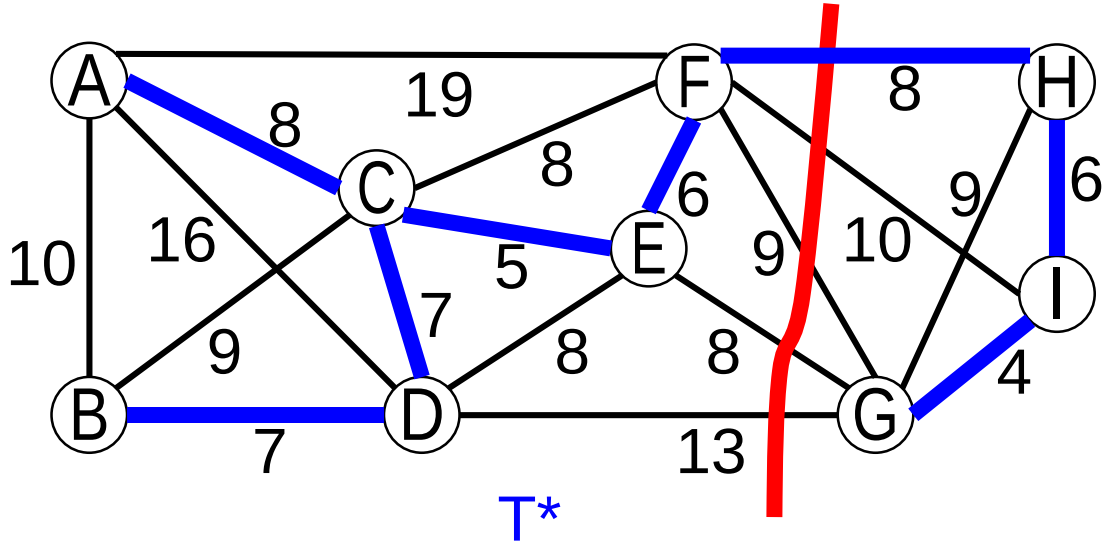
カットセットと最小全域木(1)

任意のカットセットの枝のうち，少なくとも1つは全域木に含まれる
à **カットセットの中で費用最小の枝を追加すると良い？** Yes!

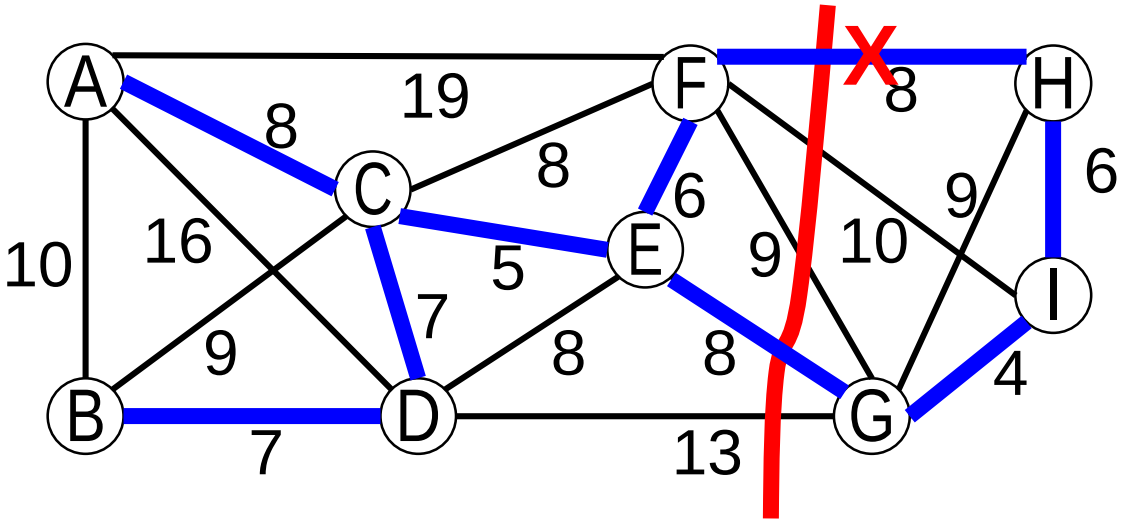
定理:
$E(V', V'')$: **任意のカットセット**
(u,v): **カットセット**$E(V', V'')$ **の中で費用最小の枝**
è (u,v)**を含む最小全域木**T*が存在

証明の概略:
T: **任意の最小全域木**
(1) T **が** (u,v) **を含む場合**: T*=T**とすればよい**
(2) T **が** (u,v) **を含まない場合**:
T**と**(u,v) **に関する基本閉路** C **は，**
カットセットの枝(s,t)**で**(s,t)≠(u,v)**なるものを必ず含む** (**なぜ？**)
è **基本閉路の性質より，** T* = T + (u,v) – (s,t) **もまた全域木**
(u,v) **の選び方より，** c(u,v)≦c(s,t) è T***の費用**≦T**の費用**
∴T***もまた最小全域木**

V’={G,H,I}, V”=V – V’
に関するカットセットの中で，(F,H)**は費用最小**
è (F,H) **を含む最小全域木**T* **が存在**



同じカットセットの中で，(E,G)**もまた費用最小**
è T*+(E,G)-(F,H) **もまた最小全域木**



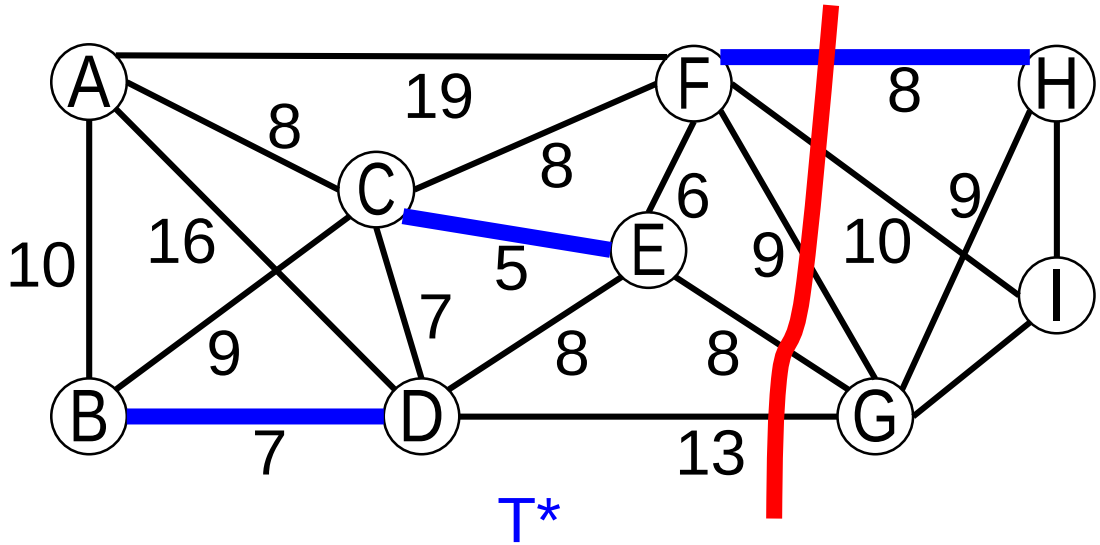
カットセットと最小全域木(2)

定理:
T': **ある最小全域木に含まれる枝集合**
$E(V',V'')$: $E(V',V'') \cap T' = \emptyset$ **を満たす，任意のカットセット**
(u,v): **カットセット**$E(V',V'')$ **の中で費用最小の枝**
è T' **および**(u,v)**を含む最小全域木**T*が存在

証明の概略： **前の定理と同様**

- (B,D), (C,E) **を含む最小全域木が存在する**
- V'={G,H,I}, V''=V – V'**に関するカットセットの中で，**(F,H)**は費用最小**

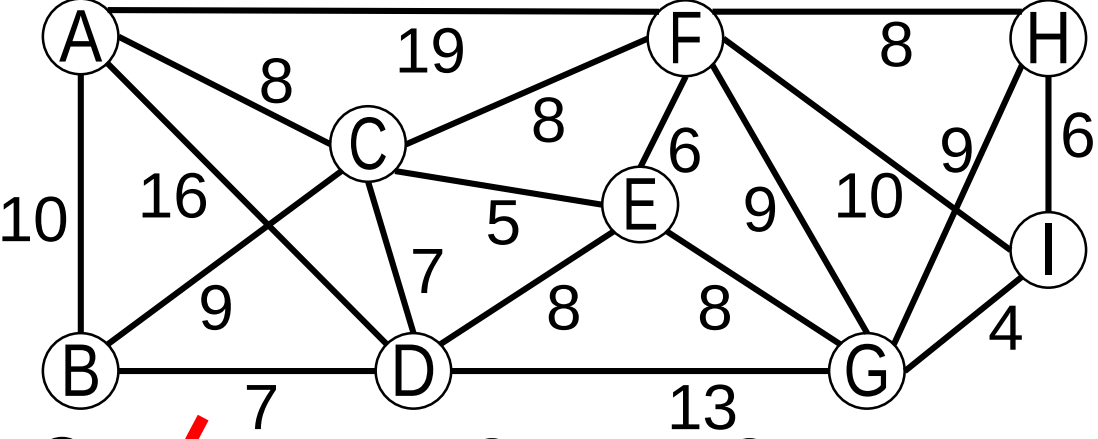
è (B,D), (C,E), (F,H) **を含む最小全域木**T* **が存在**

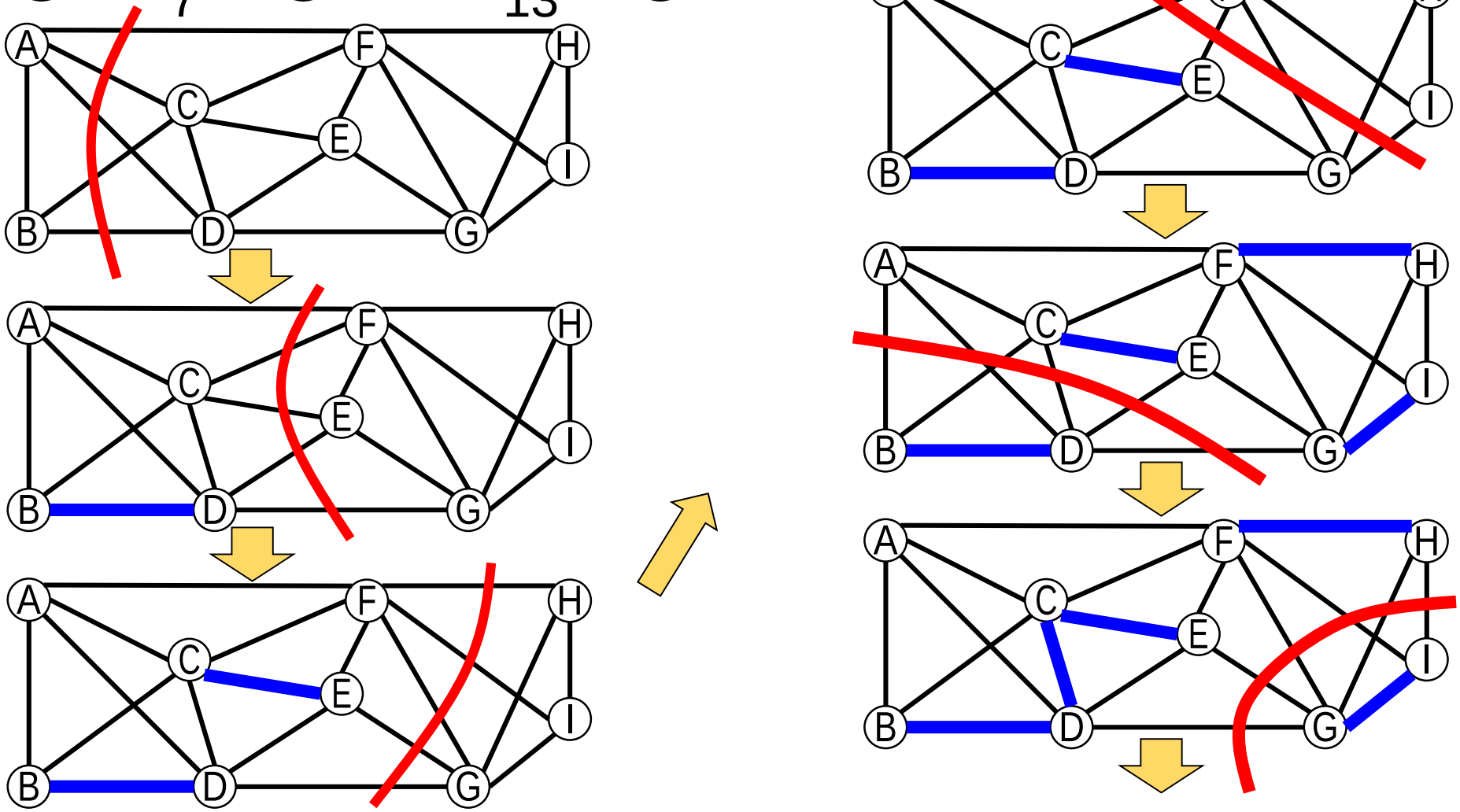


最小全域木の求め方

- グラフの枝を1つずつ選び，T に追加していく
- T が連結でない è あるカットセットの枝を T は含まない
  è そのカットセットの枝の中で，費用最小の枝を追加する
- T が連結になったら終了（ç è 枝数が |V|-1 のとき）

- 各反復で使うカットセットの選び方により，様々なアルゴリズムが得られる


A
F
H
C
E
I
B
D
G
8
19
8
8
6
9
6
10
16
5
9
10
7
9
8
8
4
7
13


A
F
H
C
E
I
B
D
G

レポート用演習問題

問題1：次の命題A,Bを使って，全域木の枝数が|V|-1 に等しいことを証明せよ．

> **命題A:** 枝集合 $T \subseteq E$ は連結 è |T| ≧ |V| - 1
> **命題B:** |T| ≧ |V| è 枝集合 Tは閉路を含む

問題2：命題Aを証明せよ．

（ヒント：頂点数に関する帰納法により証明できる．ある頂点 u をグラフから削除したとき，「得られる連結成分の数≦ u の次数」となることに注意）

定義：**頂点の次数**＝その頂点に接続する（Tの）枝の数

問題3：命題Bを以下の手順で証明せよ．

（3－1）頂点集合 V, 枝集合 T のグラフで |T|≧|V|が成り立つとき，次数1の頂点（および接続する枝）を繰り返し削除すると，全ての頂点の次数が2以上のグラフが得られる（つまり，グラフがなくならない）ことを示せ．

（3－2）全ての頂点の次数が2以上のグラフには，必ず閉路が存在することを示せ．
（ヒント：ある頂点から出発して，枝をたどっていけば閉路が必ず見つかる）

レポート用演習問題

問題4： 頂点集合 V, 枝集合 T のグラフにおいて，全ての頂点の次数の合計値が 2|T|に等しいことを証明せよ．

問題5： 頂点集合 V, 枝集合 T のグラフにおいて，各頂点の次数が2以上ならば，|T|≧|V|が成り立つことを証明せよ．（ヒント：問題4の命題を使う）

問題6： 頂点集合 V, 枝集合 T のグラフが連結かつ閉路を含むならば，|T|≧|V|が成り立つことを証明せよ．
（ヒント：次数1の頂点を繰り返し削除した後に，問題5の命題を使う）

問題7： 頂点集合 V, 枝集合 T のグラフが閉路を含まないとする．このとき，連結成分の数が k 個ならば，|T|=|V|-k が成り立つことを証明せよ．
（ヒント：各連結成分は，小さなグラフにおける全域木とみることができるので，問題1の命題を使うことができる）

レポート用演習問題

定理C: グラフGの任意の枝集合 $T \subseteq E$ に対し，
(i) T は全域木 ç è |T| = |V| - 1, かつTは連結
(ii) T は全域木 ç è |T| = |V| - 1, かつTは閉路を含まない

問題8： 定理C (i) を，命題A, Bおよび問題6の命題を使って証明せよ．

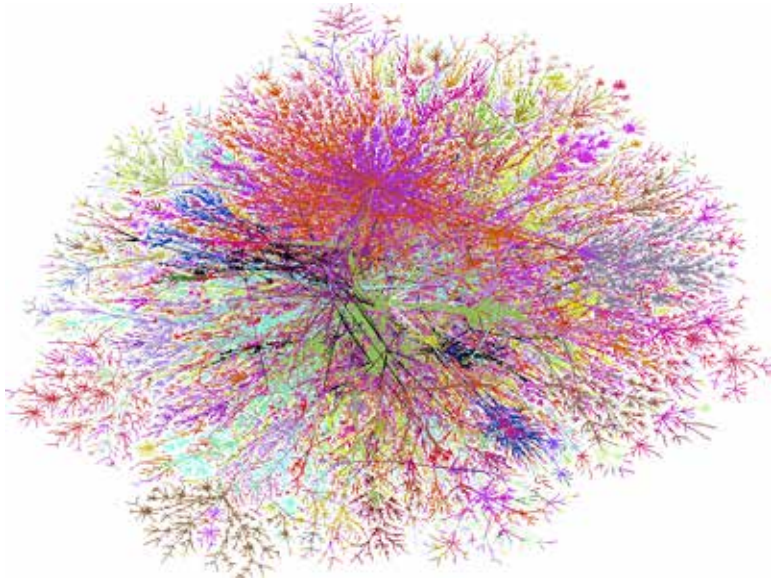
問題9： 定理C (ii) を，命題A, Bおよび問題7の命題を使って証明せよ．
（ヒント：グラフが連結 ç è 連結成分の数が1）

演習問題は友人と共同で解いても可
ただし，レポート自体は各自で自分の言葉で書くこと！

グラフの構造は図を見れば明らか？

- グラフの連結性や，閉路の存在は図を見れば明らかか？

- グラフは図として与えられているとは限らない
  - どの頂点が枝で結ばれているか，と言う情報のみ与えられることが多い
- グラフが図として与えられていても，明らかとはいえない
  - グラフが巨大なこともあるè局所的な情報を集めて調べる必要



http://jameskaskade.com/wp-content/uploads/2011/11/graph.gif