

デジタル信号処理 (VIII)

物理情報システム専攻
山口雅浩

E-mail: yamaguchi.m.aa@m.titech.ac.jp

Web: <http://www-oid.ip.titech.ac.jp>

7.1 z 変換とは...

- ラプラス変換を離散時間領域に拡張したもの
- 離散時間フーリエ変換で $e^{j\omega T}$ を z に置き換えて複素平面全体に拡張したもの

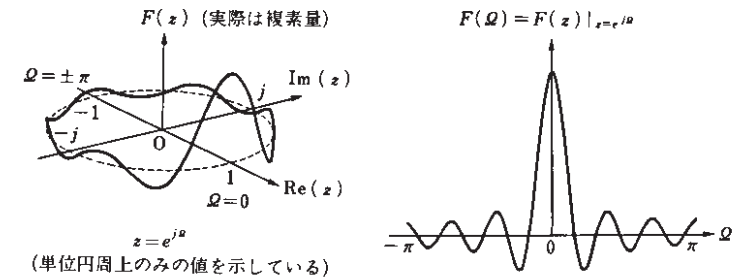


図 5.11 z 変換と DTFT

図の出展「よくわかる信号処理」、オーム社

7. z変換

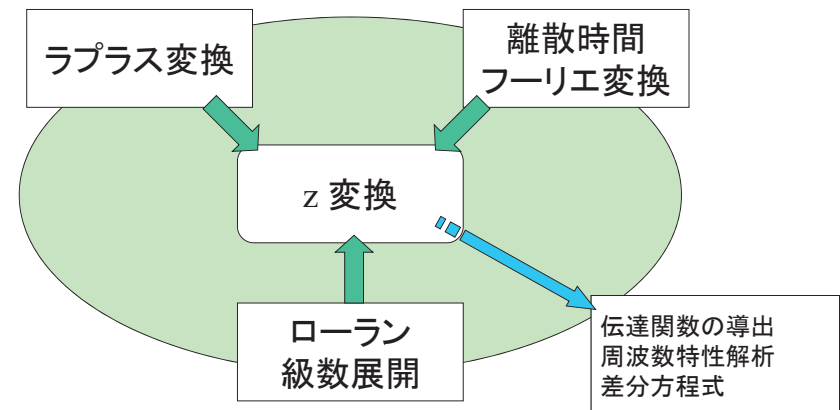
7.1 z変換とは

- z変換の数学的背景
- 逆z変換
- z変換の性質

7.2 z変換による離散時間システムの解析

- 伝達関数
- 周波数特性
- 差分方程式と伝達関数
- FIRフィルタ、IIRフィルタへの適用

z 変換とは



z変換

- 離散時間信号 $x(k)$ の z 変換は、複素変数 z を用いて、以下のように定義される

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

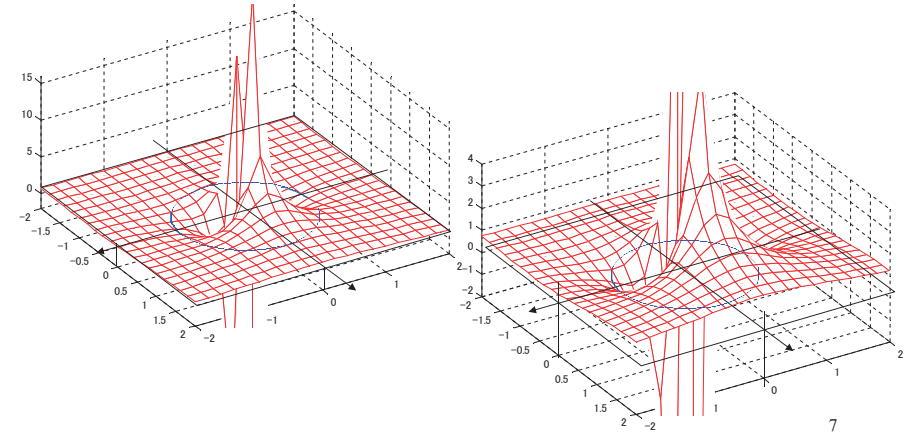
- $k \geq 0$ の範囲の信号のみに注目した場合、

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

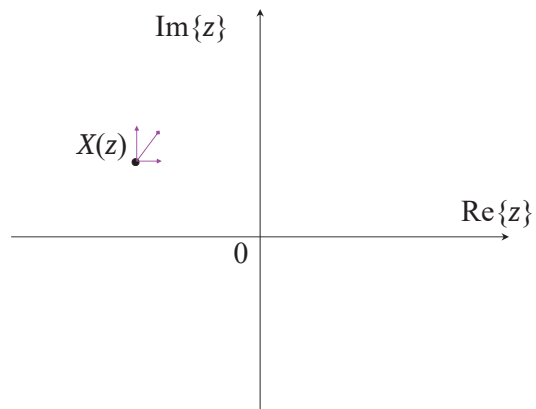
※べき級数が収束する領域でのみ定義される

収束領域

$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2)$ の z 変換 (実部)



z 平面



複素平面、ガウス平面

$X(z)$ は z 平面上の各点で複素数の値を持つ
変数も複素数、関数も複素数

z 変換とラプラス変換

z 変換	ラプラス変換
離散時間信号を対象	連続時間信号を対象
z^{-k} を乗算して Σ	e^{-st} を乗算して積分
z 平面 ($\text{Re}\{z\} - \text{Im}\{z\}$)	s 平面 ($\sigma - j\omega$)
差分方程式を代数方程式に変換	微分方程式を代数方程式に変換
複素平面の単位円上が周波数特性に対応	複素平面の虚数軸 ($j\omega$ 軸) 上が周波数特性に対応
逆変換は特異点を囲む閉曲線上で積分	逆変換は虚数軸に平行な直線上で積分

ラプラス変換は微分方程式を代数方程式に変換

- 例えば、微分方程式 $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$ をラプラス変換

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow sF(s) + f(0) \text{ を利用して}$$

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = X(s)$$

$y(0) = 0$ (システムが静止状態)であれば、

$$Y(s) = \frac{1}{s+a} X(s)$$

このようにして X と Y の関係を解くことができる

9

複素関数 $F(z)$ を $z = 0$ の周りでローラン級数展開

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^{-n}$$

$$\oint_C z^{-n} dz = \begin{cases} 2\pi j & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases} \text{ を利用すれば、}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{k-1} dz$$

$$\therefore \text{右辺} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^{-n} z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \oint_C z^{-n+k-1} dz = \alpha_k$$

$$\text{同様に、} z^{-1}F(z) \text{ を考えると } \frac{1}{j2\pi} \oint_C [z^{-1}F(z)] z^{k-1} dz = \alpha_{k-1}$$

$$z^{-m}F(z) \Leftrightarrow \alpha_{k-m}$$

11

z 変換は差分方程式を代数方程式に変換

- 差分方程式の例

$$y(k-1) + ay(k) = x(k)$$

- z 変換すると、

$$z^{-1}Y(z) + aY(z) = X(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{z^{-1} + a} X(z) = \frac{z}{az + 1} X(z)$$

※数学的背景

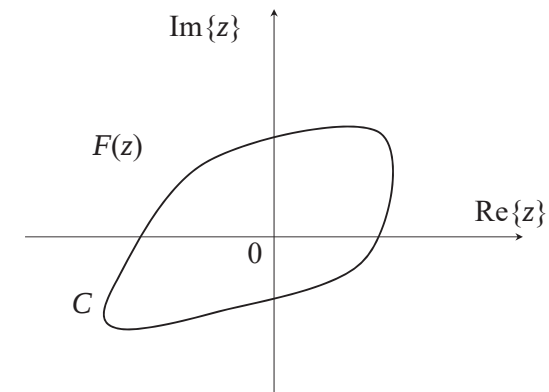
複素関数の積分

ローラン級数展開

コーシーの積分定理

10

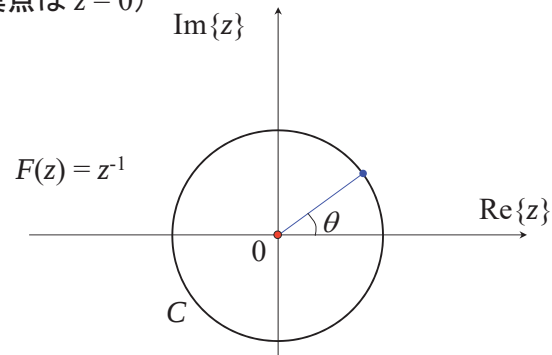
$\oint_C$ の補足



複素平面上で閉曲線の積分路 C の内部に特異点を含まない(正則な)場合、経路によらず積分値は0 (コーシーの積分定理)

→ 特異点を内側に持つ積分路の場合、経路に依存せず積分値は一定

半径 1 の単位円を積分路として $\oint_C z^{-1} dz$ を計算
(特異点は $z = 0$)



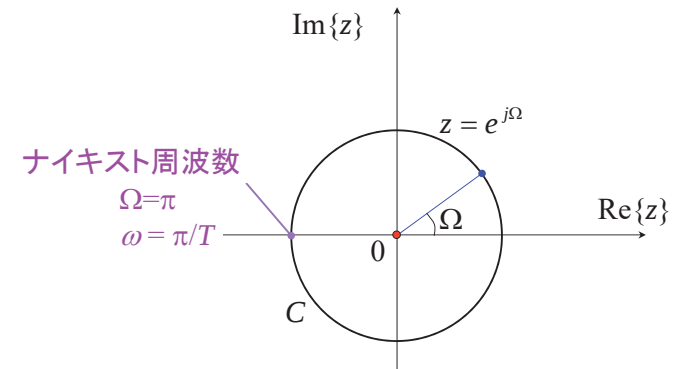
C 上では $z = e^{j\theta}$ であり、 $\theta = 0 \sim 2\pi$ で積分すればよい
 $z^{-1} = e^{-j\theta}$, $dz = j e^{j\theta} d\theta = j z d\theta$

$$\oint_C z^{-1} dz = \int_0^{2\pi} z^{-1} \cdot j z d\theta = j \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi j \quad \blacksquare$$

同様に $\oint_C z^{-n} dz = 0$ ($n \neq 1$) も容易に計算可能

13

$z = e^{j\Omega}$ とすると、 z 変換は離散時間フーリエ変換に対応



$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\Omega k}$$

ただし $\Omega = \omega T$, T はサンプリング間隔

$X(e^{j\Omega})$ は周期 2π の周期関数

15

$\alpha_k \rightarrow x(k)$ に置き換えると、

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \text{としたとき、}$$

$x(k-m)$ の z 変換は $z^{-m} X(z)$ 。

→ m 点遅延の z 変換は z^{-m} の積

→ $x(k-m)$ や $y(k-n)$ で構成される方程式の解析に利用可能

差分方程式

$$y(k) = \sum_{m=0}^M a_m x(k-m) - \sum_{n=1}^N b_n y(k-n)$$

因果的...

14

逆 z 変換

- p.11より

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz$$

- z^{-1} のべき級数による方法

– もし、 $X(z)$ が $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$ と書けるのであれば、 $x(k) = a_k$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta(n-k)$$

- 部分分数展開による方法 (後述)
- z 変換対の表を用いる (教科書 p.28)
- 逆 z 変換が既知の関数 $X_p(z)$ の和で表すことができる場合

$$X(z) = \sum_{p=0}^P a_p X_p(z) \longrightarrow x(k) = \sum_{p=0}^P a_p x_p(k)$$

($x_p(k)$ の z 変換が $X_p(z)$ であるとする)

16

部分分数展開による逆 z 変換

$$X(z) = \frac{\sum_{l=0}^M a_l z^{-l}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} = q_0 + \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{(1 - \mu_i z^{-1})} \quad \text{と部分分数展開する。}$$

$$\frac{q_i}{1 - \mu_i z^{-1}} \text{ のべき級数展開は、 } \frac{q_i}{1 - \mu_i z^{-1}} = q_i \sum_{n=0}^{\infty} \mu_i^n z^{-n}$$

$$\text{となるので、} X_i(z) = \frac{q_i}{1 - \mu_i z^{-1}} \text{ の逆 } z \text{ 変換 } x_i(k) \text{ は } x_i(k) = q_i \mu_i^k$$

また、単位インパルス $\delta(k)$ の z 変換は 1 となることから、

$$X(z) \text{ の逆 } z \text{ 変換 } x(k) \text{ は } x_i(k) = q_0 \delta(k) + \sum_{i=1}^N q_i \mu_i^k \text{ となる}$$

教科書 p.31,32, 例題 2.14

17

逆 z 変換の補足

$$\bullet X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} \quad \text{の逆 } z \text{ 変換}$$

$$x(k) = a_k \quad \text{または} \quad x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta(n-k)$$

• 例:

$$X(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_5 z^{-5} \text{ の逆 } z \text{ 変換}$$

$$x(k) = a_1 \delta(k-1) + a_2 \delta(k-2) + a_5 \delta(k-5) = \begin{cases} a_k & k = 1, 2, 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

18

z 変換の例

$$\bullet \text{ 単位インパルス } \delta(k) \Leftrightarrow 1$$

収束領域: 全領域

$$\bullet \text{ 矩形パルス}$$

$$P_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \Leftrightarrow 1 + z^{-1} + \cdots + z^{-(N-1)}$$

– 収束領域: $z=0$ を除く全領域

$$\bullet \text{ 因果的なべき信号 } x(k) = u(k) \mu^k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (\mu z^{-1})^k = \frac{1}{1 - \mu z^{-1}} \quad (u(k) \text{ は単位ステップ関数})$$

– 収束領域: $|z| > |\mu|$

他、 z 変換表を参照のこと

z 変換の性質

$$\bullet \text{ 線形性 } x(k) \Leftrightarrow X(z), y(k) \Leftrightarrow Y(z) \text{ のとき、}$$

$$ax(k) + by(k) \Leftrightarrow aX(z) + bY(z)$$

$$\bullet \text{ 時間軸の推移}$$

$$x(k-n) \Leftrightarrow z^{-n} X(z)$$

$$\bullet \text{ べき信号の乗算}$$

$$a^k x(k) \Leftrightarrow X(a^{-1} z)$$

$$\bullet \text{ 複素共役}$$

$$x^*(k) \Leftrightarrow X^*(z^*)$$

$$x(-k) \Leftrightarrow X(1/z)$$

20

たたみ込みと z 変換

- 離散たたみ込み演算

$$x_1(k) \Leftrightarrow X_1(z), x_2(k) \Leftrightarrow X_2(z), y(k) \Leftrightarrow Y(z) \text{ とする}$$

$x_1(k)$ と $x_2(k)$ の離散たたみ込み

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(k-m) \text{ の } z\text{変換は}$$

それぞれの z 変換の積 $Y(z) = X_1(z)X_2(z)$ となる

- 複素たたみ込み積分

$x_1(k)$ と $x_2(k)$ の積 $y(k) = x_1(k)x_2(k)$ の z 変換は

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} X_1(v)X_2(z/v)v^{-1}dv$$

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} X_1(z/v)X_2(v)v^{-1}dv$$

C_1, C_2 はそれぞれ $X_1(v)$ と $X_2(z/v)$ 、 $X_1(z/v)$ と $X_2(v)$ の収束領域の共通部分での周回積分路

7.2 z 変換による離散時間システムの解析

- 線形、時不変な離散時間システム



- インパルス応答 $h(k)$: 単位インパルス $\delta(k)$ を入力したときに得られる出力
- 任意の入力 $x(k)$ に対する出力 $y(k)$ は、 $x(k)$ と $h(k)$ のたたみ込み演算で与えられる。

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(k-m) = x(k) * h(k)$$

- 両辺を z 変換すれば

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad H(z) : \text{システム関数, 伝達関数}$$

22

伝達関数

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \text{または} \quad H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}$$

$$\text{伝達関数を} \quad H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M a_m z^{-m}}{1 + \sum_{n=1}^N b_n z^{-n}} \quad \text{の形式で表現すると、}$$

$$\left\{ 1 + \sum_{n=1}^N b_n z^{-n} \right\} Y(z) = \left\{ \sum_{m=0}^M a_m z^{-m} \right\} X(z) \text{ と表せるので、}$$

入出力の関係は逆 z 変換により、「差分方程式」の形となる

$$y(k) = \sum_{m=0}^M a_m x(k-m) - \sum_{n=1}^N b_n y(k-n)$$

23

伝達関数の極と零点

- $H(z)$ の値を零とする z の値 : 零点 z_{0n}
- $H(z)$ を発散させる特異点 : 極 (pole) $z_{\infty m}$

$$H(z) = K \frac{(z - z_{01})(z - z_{02}) \cdots (z - z_{0N})}{(z - z_{\infty 1})(z - z_{\infty 2}) \cdots (z - z_{\infty M})}$$

cf. 例題 2.18, 2.19

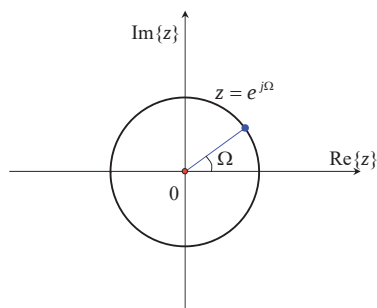
24

システムの周波数特性

$z = e^{j\Omega}$ における伝達関数の値

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jk\Omega}$$

はシステムの周波数特性を表す



$$H(e^{j\Omega}) = A(\Omega)e^{j\theta(\Omega)}$$

$A(\Omega)$: 振幅特性

$\theta(\Omega)$: 位相特性

25

システムの安定性について

- 安定なシステムとは
 - 有界な入力に対しては有界な出力となる
- FIRシステムでは常に安定
- IIRシステムではフィードバックループがあるので、条件によっては不安定になる

- 安定なシステムの必要十分条件 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$ より、 z の級数が収束することが条件

→ $H(z)$ の極が全て z 平面内の単位円内に存在すること

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M a_m z^{-m}}{1 + \sum_{n=1}^N b_n z^{-n}} = \frac{A \prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{n=1}^N (1 - d_n z^{-1})} \quad \text{分母} = 0$$

教科書p.44

27

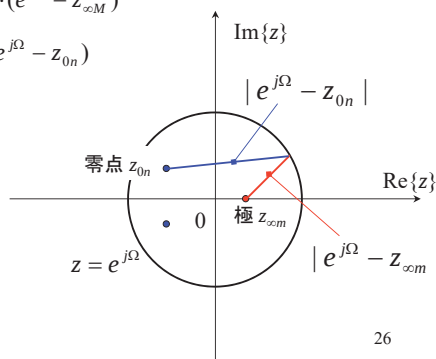
システムの振幅特性, 位相特性

$$A(\Omega) = K \frac{|e^{j\Omega} - z_{01}| |e^{j\Omega} - z_{02}| \cdots |e^{j\Omega} - z_{0N}|}{|e^{j\Omega} - z_{\infty 1}| |e^{j\Omega} - z_{\infty 2}| \cdots |e^{j\Omega} - z_{\infty M}|}$$

$$\theta(\Omega) = -\arg \frac{(e^{j\Omega} - z_{01})(e^{j\Omega} - z_{02}) \cdots (e^{j\Omega} - z_{0N})}{(e^{j\Omega} - z_{\infty 1})(e^{j\Omega} - z_{\infty 2}) \cdots (e^{j\Omega} - z_{\infty M})}$$

$$= \sum_{m=1}^M \arg(e^{j\Omega} - z_{\infty m}) - \sum_{n=1}^N \arg(e^{j\Omega} - z_{0n})$$

極と零点から計算できる



26

FIRフィルタの例

- インパルス応答 $h(k) = \{1, a\}$

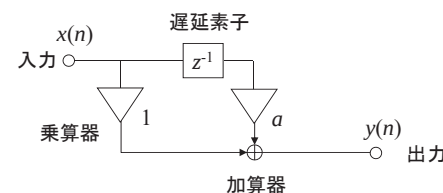
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^M h(k)x(n-k) = \underline{x(n) + ax(n-1)}$$
 - 差分方程式 $y(n) = x(n) + ax(n-1)$

- z 変換すると、

$$Y(z) = X(z) + az^{-1}X(z) = (1 + az^{-1})X(z)$$

$$H(z) = 1 + az^{-1}$$

- 極は $z = 0$ のみ: 常に安定
- 回路



28

- 周波数特性

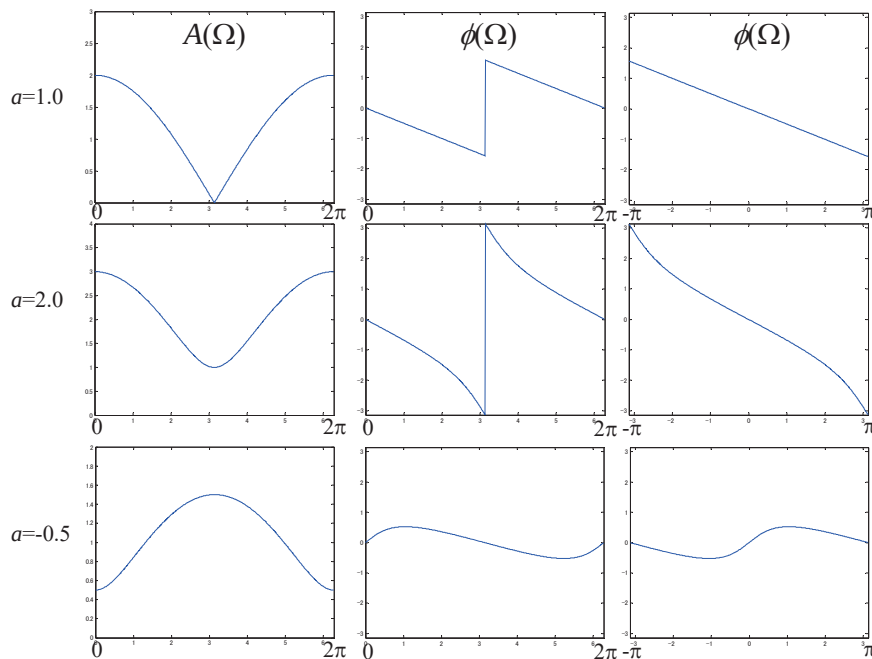
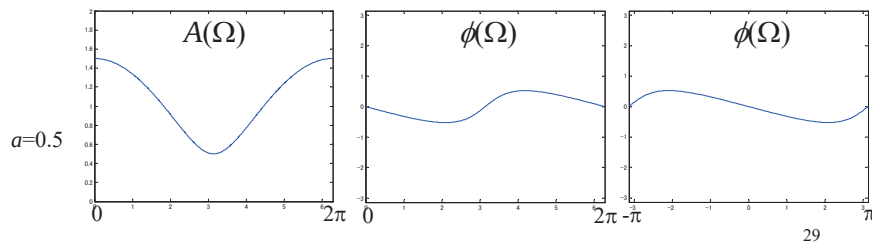
$$H(e^{j\Omega}) = 1 + ae^{-j\Omega} \quad (\text{離散時間フーリエ変換})$$

- 振幅特性

$$A(\Omega) = |H(e^{j\Omega})| = \sqrt{|1 + ae^{-j\Omega}|^2} = \sqrt{1 + a^2 + 2a \cos \Omega}$$

- 位相特性

$$\phi(\Omega) = \arg\{H(e^{j\Omega})\} = \tan^{-1} \left\{ \frac{-a \sin \Omega}{1 + a \cos \Omega} \right\}$$

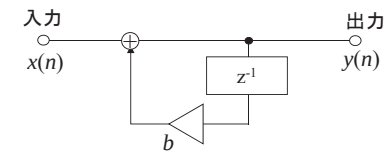


IIRフィルタの例

- 差分方程式

$$y(n) = x(n) + by(n-1]$$

- 回路



- z 変換すると、

$$Y(z) = X(z) + bz^{-1}Y(z)$$

$$(1 - bz^{-1})Y(z) = X(z) \longrightarrow Y(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} X(z)$$

- 伝達関数

$$H(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

- 極は $z = b$: 安定な条件 $|b| < 1$

31

- 周波数特性

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - be^{-j\Omega}}$$

- 振幅特性

$$A(\Omega) = |H(e^{j\Omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 - 2b \cos \Omega}}$$

- 位相特性

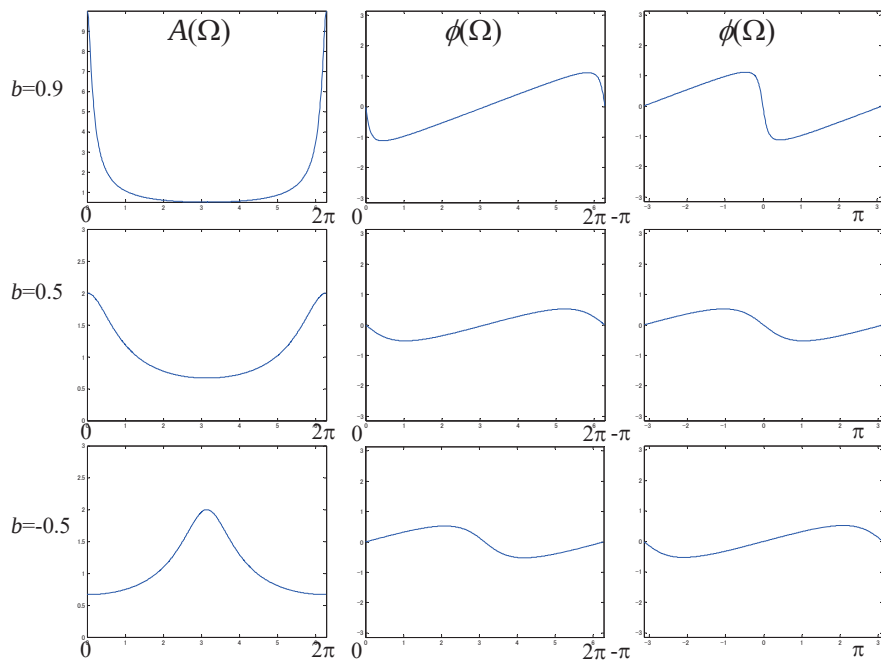
$$\begin{aligned} \phi(\Omega) &= \arg\{H(e^{j\Omega})\} = \arg\left\{\frac{1}{1 - be^{-j\Omega}}\right\} = \arg\left\{\frac{1 - be^{j\Omega}}{1 + b^2 - 2b \cos \Omega}\right\} \\ &= \tan^{-1} \left\{ \frac{-b \sin \Omega}{1 - b \cos \Omega} \right\} \end{aligned}$$

- インパルス応答

$$H(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} \quad \text{の逆}z\text{変換(教科書p.28表2.1)より}$$

$$h(n) = b^n$$

32



```

w = [0:0.01:2*pi];
a = -0.5;
ha = sqrt( 1 + a * a + 2 * a * cos( w ) );
plot( w, ha );
axis( [0, 2*pi, 0, 2] );
ph = - atan2( a*sin(w), (1+a*cos(w)) );
plot( w, ph );
axis( [0, 2*pi, -pi, pi] );
plot( w-pi, fftshift(ph) );
axis( [-pi, pi, -pi, pi] );

```

```

b = 0.5;
hb = 1 ./ sqrt( 1 + b * b - 2 * b * cos(w) );
plot(w, hb);
axis( [0, 2*pi, 0, 3] );
pb = - atan2( b*sin(w), (1-b*cos(w)) );
plot(w, pb);
axis( [0, 2*pi, -pi, pi] );
plot(w-pi, fftshift(pb));
axis( [-pi, pi, -pi, pi] );

```

差分方程式とz変換はディジタルフィルタの構成を求めるために有用

$$y(k) = \sum_{m=0}^M a_m x(k-m) \quad \text{の場合の例: } H(z) = \sum_{m=0}^M a_m z^{-m}$$

