ディジタル信号処理 (VII)

物理情報システム専攻
山口雅浩

E-mail: *yamaguchi.m.aa@m.titech.ac.jp*

Web: *http://www-oid.ip.titech.ac.jp*

6. 離散時間信号とシステム

6．5　離散時間システムの周波数特性

$$e^{j\Omega n} \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow H(\Omega)e^{j\Omega n}$$

- インパルス応答が $h(n)$ で与えられるシステムに、角周波数Ω（ $\Omega = \omega T$ ）の複素指数関数信号

$$x(n) = e^{j\Omega n} = \cos\Omega n + j\sin\Omega n$$

を入力した場合、その出力は

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(k-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\Omega(n-k)} = e^{j\Omega n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k}$$

$$y(n) = H(\Omega)e^{j\Omega n}$$

となる。

ただし $H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k}$ は$h(n)$の離散時間フーリエ変換

$$y(n) = H(\Omega)e^{j\Omega n}$$

$H(\Omega)$は角周波数Ωの入力に対する係数（ゲイン）

＝（線形シフト不変）離散時間システムの周波数特性

（周波数伝達関数）

$$H(\Omega) = A(\Omega)e^{-j\theta(\Omega)}$$

$A(\Omega)$　振幅特性

$\theta(\Omega)$　位相特性

$$X(\Omega) \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow H(\Omega)X(\Omega)$$

$$y(n) = A(\Omega)e^{j\{\Omega n + \theta(\Omega)\}}$$

振幅が$A(\Omega)$倍となり、位相が$\theta(\Omega)$だけずれる

例題1

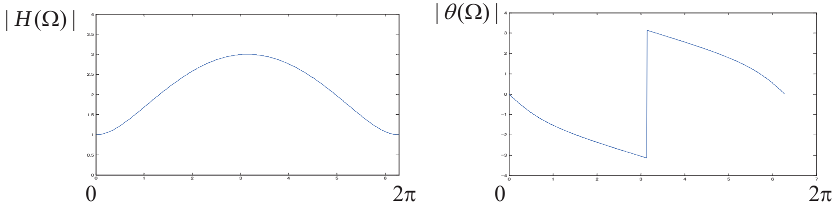
インパルス応答が$h(n) = \{ -1, 2 \}$ で与えられる線形時不変離散時間システムの周波数伝達特性、振幅特性、位相特性を求めよ

$$H(\Omega) = \boldsymbol{DTFT}\{h(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\cdot e^{-j\Omega k} = h(0)+h(1)e^{-j\Omega} = -1+2e^{-j\Omega}$$

$$|H(\Omega)|^2 = 1+4-2(e^{-j\Omega}+e^{j\Omega}) = 5-4\cos\Omega$$

振幅特性 $|H(\Omega)| = \sqrt{5-4\cos\Omega}$

位相特性 $\theta(\Omega) = \tan^{-1}\dfrac{\mathrm{Im}\{H(\Omega)\}}{\mathrm{Re}\{H(\Omega)\}} = -\tan^{-1}\dfrac{2\sin\Omega}{-1+2\cos\Omega}$

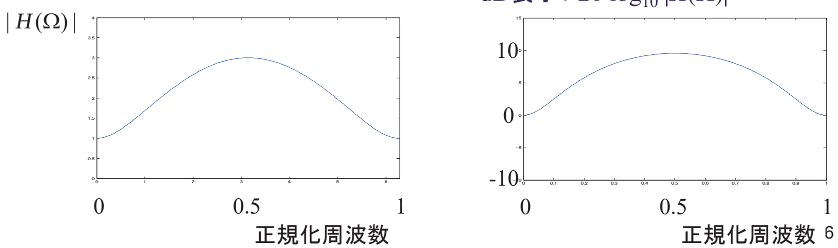


正規化周波数特性の表示

- T_s : 標本化間隔(周期)
- $f_s = 1 / T_s$: 標本化周波数
- $\Omega = \omega T_s$: 正規化角周波数
- $f_N = \Omega / 2\pi = f / f_s$: 正規化周波数

  → 標本化間隔を気にする必要が無い。

  (標本化間隔で割れば実際の周波数)



例題2

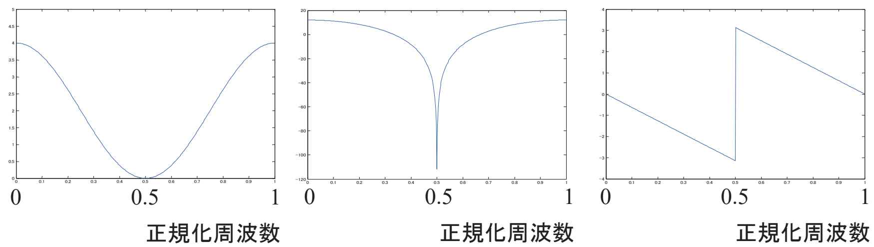
インパルス応答が$h(n) = \{ 1, 2, 1 \}$ で与えられる線形時不変離散時間システムの周波数伝達特性、振幅特性、位相特性を求めよ

$$H(\Omega) = 1 + 2e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega} = (e^{j\Omega} + 2 + e^{-j\Omega})\, e^{-j\Omega}$$
$$= 2\,(1 + \cos\Omega)\, e^{-j\Omega}$$

振幅特性 $|H(\Omega)| = 2\,(1 + \cos\Omega)$

位相特性 $\theta(\Omega) = \arg\{2(1+\cos\Omega)e^{-j\Omega}\} = \arg\{e^{-j\Omega}\} = -\Omega$

直線位相特性

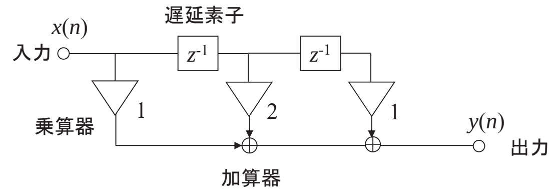


FIRフィルタの例

- インパルス応答 $h(k) = \{ 1\ \ 2\ \ 1 \}$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{M} h(k)x(n-k) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$$

  - 差分方程式 $y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$
  - 回路



例題2．7（p.23）

差分方程式 $y(n) = x(n) + b\,y(n-1)$ で表されるシステムの周波数伝達特性、振幅特性、位相特性を求めよ。ただし $|b| < 1$ とする。

両辺を離散時間フーリエ変換してみる

$$Y(\Omega) = X(\Omega) + bY(\Omega) \cdot e^{-j\Omega}$$

変形すると

$$(1 - be^{-j\Omega})Y(\Omega) = X(\Omega) \longrightarrow Y(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{1 - be^{-j\Omega}} = H(\Omega)X(\Omega)$$

より、

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - be^{-j\Omega}}$$

振幅特性 $|H(\Omega)| = \sqrt{\dfrac{1}{(1 - be^{-j\Omega})(1 - be^{j\Omega})}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + b^2 - 2b\cos\Omega}}$

位相特性 $\theta(\Omega) = -\tan^{-1}\dfrac{b\sin\Omega}{1 - b\cos\Omega}$

IIRフィルタの例

- 差分方程式

$$y(n) = x(n) + by(n-1)$$

- 回路