

デジタル信号処理 (VI)

物理情報システム専攻
山口雅浩

E-mail: yamaguchi.m.aa@m.titech.ac.jp

Web: <http://www-oid.ip.titech.ac.jp>

1

6. 離散時間信号とシステム

6. 1 離散時間信号

6. 2 離散たたみ込み演算

6. 3 離散時間システム

6. 4 離散時間信号のフーリエ変換

- 離散時間フーリエ変換
- 離散時間フーリエ変換の性質

6. 5 離散時間システムの周波数特性

4

- 離散時間信号をどのように数式で表すか？
- 離散たたみ込みを自分で計算しよう
- 離散時間システムを連続時間システムと同様に理解する
→ LTIシステム、インパルス応答
- FIRシステムとIIRシステムのインパルス応答はどのように表現できるか？
- 離散時間フーリエ変換とはどのようなものか？

5

6. 1 離散時間信号

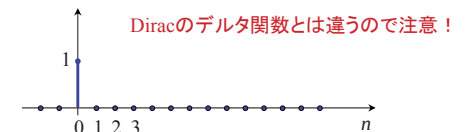
- 離散時間信号 $x(nT)$ または $x(n)$

変数が n か nT かで
意味が全く異なるので
注意

- 離散時間信号の例

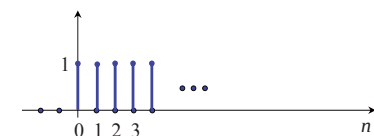
- 単位サンプル(単位インパルス)信号

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



- 単位ステップ信号

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



6

単位インパルス信号、単位ステップ信号の性質

- 単位ステップ信号の差分信号(微分に対応)は単位インパルス信号

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

- 単位インパルス信号の加算信号(積分に対応)は単位ステップ信号

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$$

- 任意の離散時間信号 $x(n)$ に対して以下が成り立つ

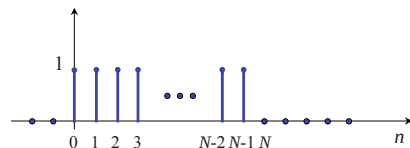
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)$$

cf. Diracのδ関数の性質

7

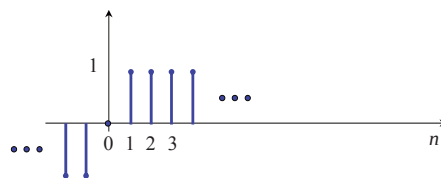
矩形パルス信号

$$P_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



符号信号

$$\text{sgn}(n) = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -1 & n < 0 \end{cases}$$



8

べき信号 $x(n) = \mu^n$

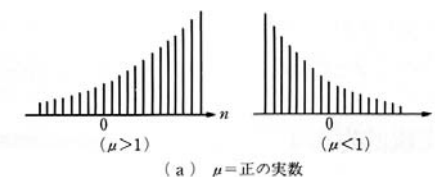
■ μ が実数のとき、
(実数 a を用いて)

$\mu > 0$ なら、
 $a = \log \mu$ として
($\mu = e^a$)

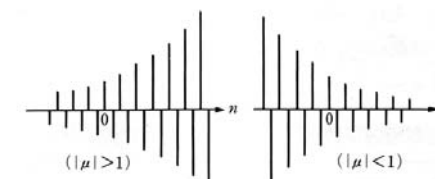
$$x(n) = e^{an}$$

$\mu < 0$ なら、
 $a = \log(-\mu)$ として
($\mu = -e^a$)

$$x(n) = (-1)^n e^{an}$$



(a) μ = 正の実数



(b) μ = 負の実数

図 2-18 べき信号

図: 浜田望「よくわかる信号処理」

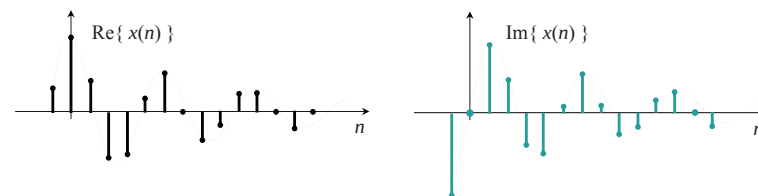
べき信号 $x(n) = \mu^n$

■ μ が複素数のとき、

$$\mu = e^{a+j\omega}$$

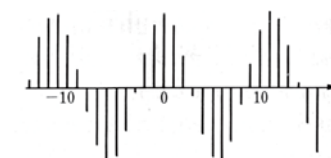
と書ける ($-\pi < \omega \leq \pi$) ので

$$x(n) = e^{(a+j\omega)n} = e^{an} \{ \cos \omega n + j \sin \omega n \}$$



$a = 0$ のとき $|\mu| = 1$

$$x(n) = e^{j\omega n} = \cos \omega n + j \sin \omega n$$



(b) $\cos \frac{\sqrt{2}}{8} \pi n$ (非周期信号)

下図: 浜田望「よくわかる信号処理」

6.2 離散たたみ込み(たたみ込み演算) Convolution

- 線形、時不変の離散時間システム
(Linear Time-invariant system, LTI system)
- 入力信号 $x(n)$
- 出力応答 $y(n)$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = x(n) * h(n)$$

- $h(n)$: インパルス応答
= 入力が単位インパルス $x(n) = \delta(n)$ のときの応答
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k)h(n-k) = h(n)$$

11

たたみ込み演算の例

例題:

- $x(n) = \{ 1, 1, 2, 0, 3, 0 \}$
- $h(n) = \{ 3, -2, 0 \}$ のとき

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

を計算してみよ

12

考え方(1)

$$h(0) = 3, h(1) = -2, h(2) = 0$$

$$\begin{aligned} x(n) * h(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) \\ &= x(n)h(0) + x(n-1)h(1) + x(n-2)h(2) \\ &= 3x(n) - 2x(n-1) \end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6
$x(n)$	1	1	2	0	3	0	
$3x(n)$	3	3	6	0	9	0	
$x(n-1)$		1	1	2	0	3	0
$-2x(n-1)$		-2	-2	-4	0	-6	0
$x(n) * h(n)$	3	1	4	-4	9	-6	0

13

考え方(2)

$$k = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$$

n	$x(k) = \{ 1, 1, 2, 0, 3, 0 \}$	
0	$h(-k) = \{ 0, -2, 3 \}$	$\longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(0-k) = 3$
1	$h(1-k) = \{ 0, -2, 3 \}$	$\longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k) = 1$
2	$h(2-k) = \{ 0, -2, 3 \}$	$\longrightarrow 4$
3	$h(3-k) = \{ 0, -2, 3 \}$	$\longrightarrow -4$
4	$h(4-k) = \{ 0, -2, 3 \}$	$\longrightarrow 9$
5	$h(5-k) = \{ 0, -2, 3 \}$	$\longrightarrow -6$
6	$h(6-k) = \{ 0, -2, 3 \}$	$\longrightarrow 0$

Matlabの場合

```
>> x = [ 1, 1, 2, 0, 3, 0 ];
>> h = [ 3, -2, 0 ];
```

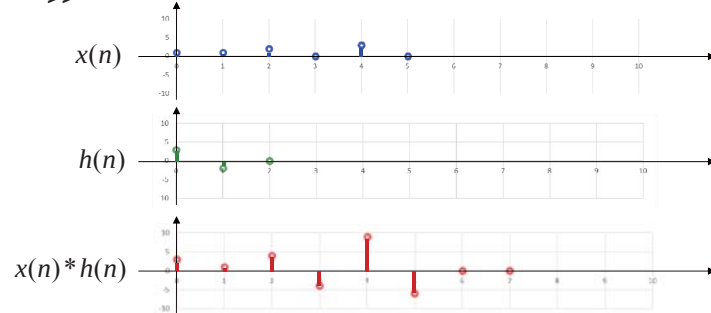
Matlabでの定義 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n+1-k)$

```
>> conv( x, h )
```

```
ans =
```

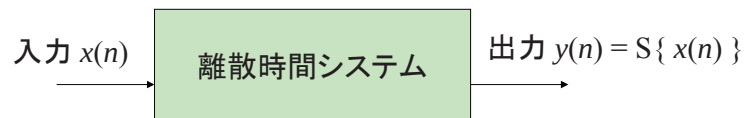
```
3 1 4 -4 9 -6 0 0
```

```
>>
```



15

6.3 離散時間システム



- 線形性

$$S\{ a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \} = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$$

- シフト不変性(時不変)

$$S\{ x(n-k) \} = y(n-k)$$

- LTI(Linear Time-Invariant)システム

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$$

16

- 因果性

$$h(n) = 0 \quad \text{if } n < 0$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- 安定性

- 入力 $x(n)$ が有界ならば応答 $y(n)$ も有界であれば安定。
- 線形時不変システムにおける条件は、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

17

FIRシステムとIIRシステム

- FIRシステム(非巡回形, 非再帰形)

- 差分方程式 $y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k)$

- IIRシステム(巡回形, 再帰形)※

- 差分方程式 $y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k)$

- 初期値 $x(-1), x(-2), \dots, x(-M), y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$

18

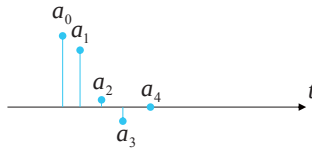
※再帰形のFIRフィルタもありえる

FIRシステムのインパルス応答

単位インパルス関数を用いて表すと

$$h(n) = \sum_{k=0}^M a_k \delta(n-k)$$

$$h(n) = a_n$$



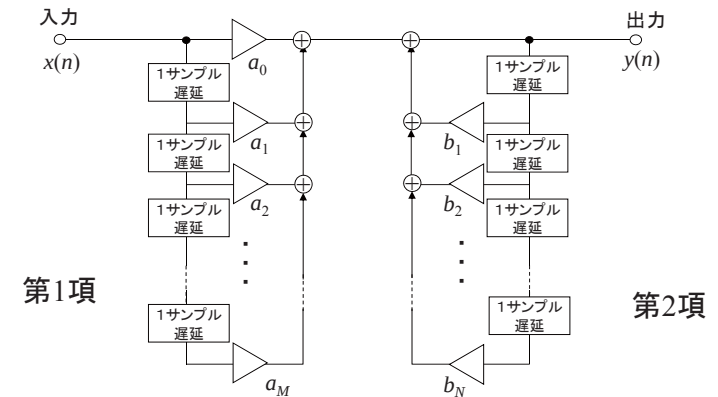
$$h(n) = a_0 \delta(n) + a_1 \delta(n-1) + a_2 \delta(n-2) + a_3 \delta(n-3) + a_4 \delta(n-4)$$

19

差分方程式

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k)$$

- $\text{Max}(M, N)$: 差分方程式の次数



21

IIRシステムのインパルス応答

- 例 $y(n) = x(n) + b y(n-1)$

– 初期値 $y(-1) = 0$ とする

$$h(0) = \delta(0) + b y(-1) = 1$$

$$h(1) = \delta(1) + b y(0) = b$$

$$h(2) = \delta(2) + b y(1) = b^2$$

$\vdots$

$$h(n) = \delta(n) + b y(n-1) = b^n \longrightarrow \text{べき信号}$$

単位インパルス関数を用いて表すと

$$h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \delta(n-k)$$

20

6. 4 離散時間信号のフーリエ変換

- サンプリングされた連続時間信号 $x_s(t)$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \delta(t-nT) \quad \text{ディラックの}\delta\text{関数}$$

- $x_s(t)$ のフーリエ変換

$$\begin{aligned} F\{x_s(t)\} &= F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \delta(t-nT)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \delta(t-nT) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega nT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \end{aligned}$$

$$(\Omega = \omega T)$$

22

離散時間フーリエ変換 (DTFT)

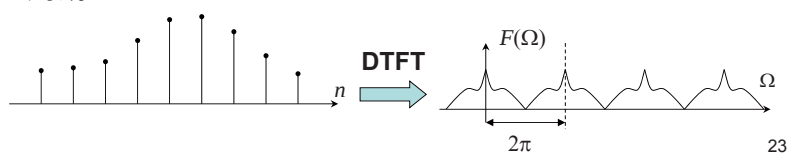
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

後に述べる離散フーリエ変換 (DFT) とは異なる!

- サンプリングされた信号のフーリエ変換は周期関数 (第V回資料参照)

$$X(\Omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\Omega + 2\pi)n} = X(\Omega)$$

- 周期: 2π



23

逆離散時間フーリエ変換

- $X(\Omega)$ は周期 2π の周期関数なので、積分範囲は $0 - 2\pi$ または $-\pi \sim \pi$ でよい

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

逆フーリエ変換の式と比べると

$\omega T \rightarrow \Omega$, 積分範囲, 連続時間信号 $\rightarrow$ 離散時間信号
が異なる

「ディラックの δ 関数と、単位インパルス信号との違い」

24

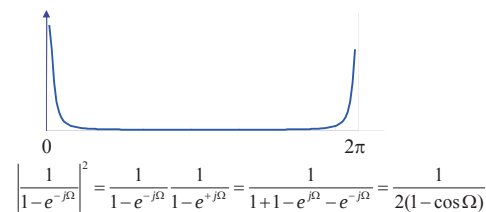
離散時間フーリエ変換の例(1)

- 単位インパルス $\delta(n)$

$$\text{DTFT}\{\delta(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\Omega n} = 1$$

- 単位ステップ $u(n)$

$$\text{DTFT}\{u(n)\} = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi m)$$



単位ステップ系列を以下のように表す

$$u(n) = u_1(n) + u_2(n)$$

ただし

$$u_1(n) = 0.5, \quad u_2(n) = \begin{cases} 0.5 & n \geq 0 \\ -0.5 & n < 0 \end{cases}$$

このとき、

$$U_1(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.5 e^{-j\Omega n} = \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi m)$$

となる。また

$$u_2(n) - u_2(n-1) = \delta(n)$$

の両辺を離散時間フーリエ変換すると

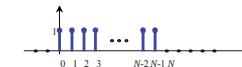
$$U_2(\Omega) - U_2(\Omega) e^{-j\Omega} = 1 \\ = (1 - e^{-j\Omega}) U_2(\Omega)$$

となるので、これより、

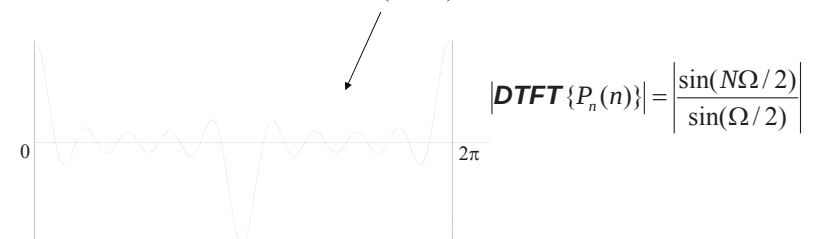
$$U_2(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}}$$

離散時間フーリエ変換の例(2)

- 矩形パルス



$$\begin{aligned} \text{DTFT}\{P_n(n)\} &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\Omega n} = \frac{1 - e^{-j\Omega N}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{e^{-j\Omega(N-1)/2} \{e^{j\Omega N/2} - e^{-j\Omega N/2}\}}{e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}} \\ &= e^{-j\Omega(N-1)/2} \frac{\sin(N\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \end{aligned}$$



26

離散時間フーリエ変換の性質 (連続時間のフーリエ変換と同様の性質を持つ)

- (1) 線形性
- (2) 時間軸推移
- (3) 時間軸の伸縮
- (4) 周波数軸の推移
- (5) 周波数軸の伸縮
- (6) 対称性
- (7) 複素共役
- (8) 差分信号

$$\mathbf{DTFT}\{x(n) - x(n-1)\} = X(\Omega) - X(\Omega)e^{-j\Omega} = (1 - e^{-j\Omega})X(\Omega)$$

$$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{d}{d\Omega} e^{-j\Omega n} = \mathbf{DTFT}\{-jn x(n)\}$$

27

パーシバルの等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

有限範囲(0~2π)の積分でよい

- 時間領域のエネルギーは周波数領域でも保存される

29

離散たたみ込みの離散時間フーリエ変換

- 連続時間信号の場合と同様にたたみ込み演算の定理が成り立つ

$$\begin{aligned} \mathbf{DTFT}\{x(n) * h(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) e^{-j\Omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)H(\Omega)e^{-j\Omega k} \\ &= X(\Omega)H(\Omega) \end{aligned}$$

ただし

$$X(\Omega) = \mathbf{DTFT}\{x(n)\}$$

$$H(\Omega) = \mathbf{DTFT}\{h(n)\}$$

28

6. 1~6. 4のまとめ

- 離散時間信号を数式で表す方法に慣れよう
- 離散たたみ込みの計算方法、直感的な理解
 - 手計算
 - プログラム
- 離散時間システム
 - LTIシステム、インパルス応答
 - 安定性、因果性
- FIRシステム、IIRシステムのインパルス応答
- 離散時間信号のフーリエ変換は周期的になるので、一周分だけ求めればよい
 - 離散時間フーリエ変換

30