ディジタル信号処理
(V)

物理情報システム専攻
山口雅浩

E-mail: *yamaguchi.m.aa@m.titech.ac.jp*

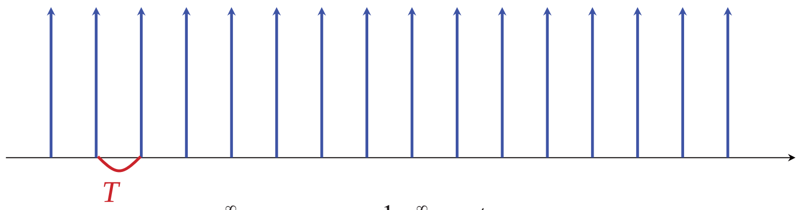
Web: *http://www-oid.ip.titech.ac.jp*

5. 信号の標本化（サンプリング）

p.72

- 帯域制限とは何か？
- 元の信号の情報を失わないように標本化するには、どのような間隔で標本化する必要があるか？
- エイリアシングとは何か？
- ナイキスト周波数とは何か？
- 標本化された離散時間信号から、どのようにして元の信号を再現すればよいか。
- 内挿（補間）とは何か？

５．１　δ関数列（comb関数）



$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T}-n\right)$$

∵δ関数は正の定数aに対して　$\delta\left(\frac{t}{a}\right) = a\delta(t)$　なる性質がある

これより　$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T}-n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$

δ関数列のフーリエ変換

$$\boldsymbol{F}\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\ e^{-j\omega t}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t')\ e^{-j\omega(t'+nT)}\ dt'$$

$$=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega nT}=\frac{2\pi}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi m}{T})}_{※}=\omega_s\delta_{\omega_s}(\omega)$$

練習問題　※が正しいことを確認せよ。

デルタ関数列のフーリエ変換はデルタ関数列

間隔 T ⟶ 間隔 $\omega_s=\dfrac{2\pi}{T}$

5．2　標本化の数学的表現

- 連続時間信号　$x(t)$
- 標本化された連続時間信号　$x_s(t)$
- 離散時間信号 $x[n]$

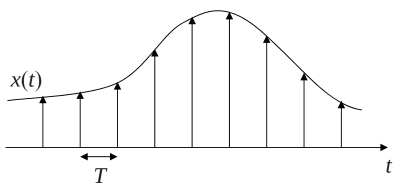
$x[n]=x(nT)$

$$x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\ \delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\ \delta(t-nT)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\ \delta(t-nT)$$

$$=x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$=x(t)\ \delta_T(t)$$



5．3　標本化された信号のフーリエ変換

$$X(\omega)=\boldsymbol{F}\{x(t)\}$$

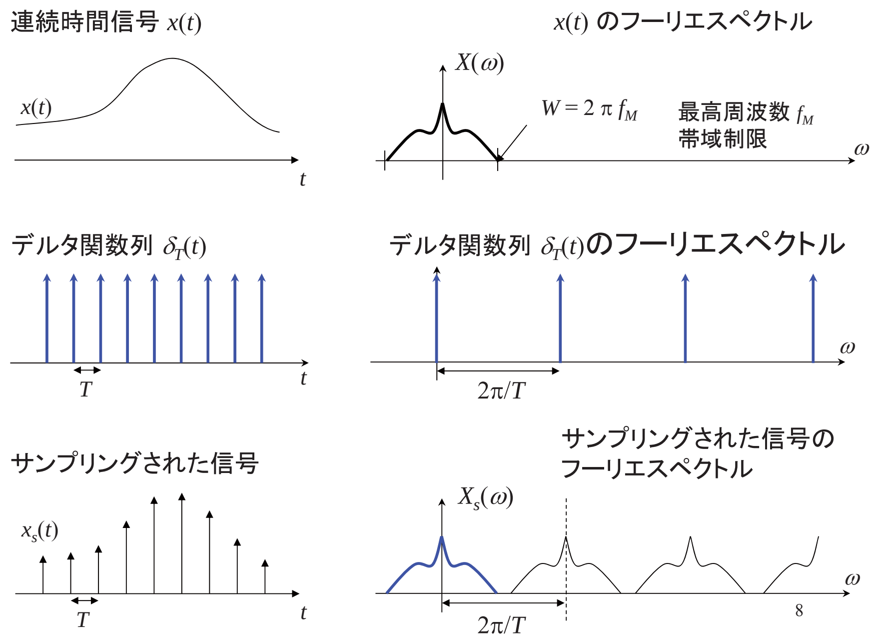
$$X_s(\omega)=\boldsymbol{F}\{x_s(t)\}$$

$$=\boldsymbol{F}\{x(t)\ \delta_T(t)\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{F}\{x(t)\}*\boldsymbol{F}\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\left\{\frac{2\pi}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi m}{T})\right\}$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X(\omega-\frac{2\pi m}{T})=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X(\omega-m\omega_s)$$



５．４ 標本化定理
（その１）

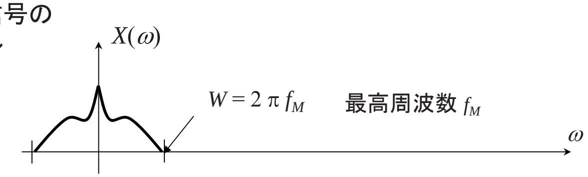
- 連続時間信号 $x(t)$ の最高周波数が f_M であるとき、
  f_M の2倍よりも高い周波数 f_s で標本化すれば、
  標本化された離散時間信号 $x_s(t)$ から
  元の連続時間信号 $x(t)$ を完全に復元することができる

※ 標本化周波数 $f_s = 1 / T$

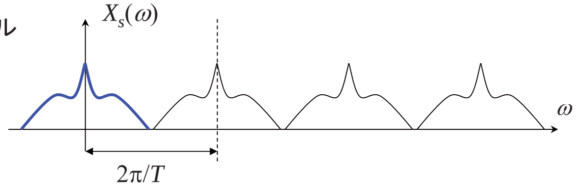
$f_N = \dfrac{1}{T} = 2 f_M$ をナイキストレート（Nyquist rate）と呼ぶ

フーリエ領域で見ると

帯域制限された信号の
フーリエスペクトル



標本化された信号
のフーリエスペクトル



$\dfrac{2\pi}{T} > 2W$ すなわち $T < \dfrac{1}{2 f_M}$ で標本化すれば、$X_s(\omega)$ から $X(\omega)$ を
完全に復元することができる。

時間領域で見ると

$f_0 = 100\text{Hz}$のとき
$T_0 = 10\text{ms}$
$f_N = 2 f_0 = 200\text{Hz}$
$T_N = 5\text{ms}$

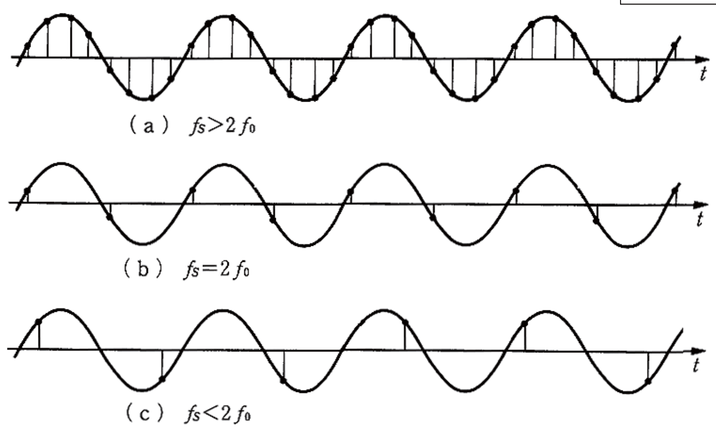


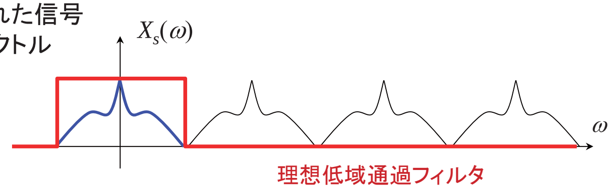
図 7·4 正弦波信号 $A \sin(\omega_0 t + \phi)$ のサンプリング

$\omega_0 = 2\pi f_0$

浜田望，「よくわかる信号処理」

どのようにして復元するか？

サンプリングされた信号
のフーリエスペクトル



取り出された信号のフーリエスペクトル

５．５　連続時間信号の再構成 標本化定理（その２）

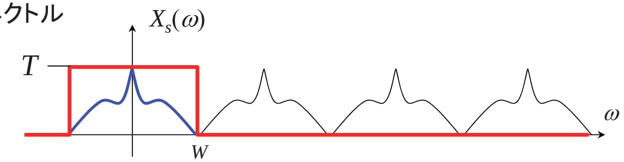
- 連続時間信号 $x(t)$ を標本化周波数
  $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi / T$
  でサンプリングして得られる標本値 $x(nT)$ から元の連続時間信号 $x(t)$ を完全に再現するには、
  $x(t)$ が角周波数 $W = \omega_s / 2$（ナイキスト周波数）未満に帯域制限されていればよい。

  このとき以下の式を用いて $x(t)$ を再現できる

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin W(t-nT)}{W(t-nT)}$$

標本化された信号に対する フーリエ領域でのフィルタリング

標本化された信号のフーリエスペクトル



理想低域通過フィルタ = 矩形パルス関数　$T\,p(\omega/2W)$

$$X_R(\omega) = X_s(\omega) \cdot T\,p(\omega/2W)$$

取り出された信号のフーリエスペクトル

$X_R(\omega)$ を逆フーリエ変換すれば

$\boldsymbol{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(\omega)F_2(\omega)$ より $\boldsymbol{F}^{-1}\{F_1(\omega)F_2(\omega)\} = f_1(t) * f_2(t)$ を使う

$$x_R(t) = \boldsymbol{F}^{-1}\{X_s(\omega) \cdot T\,p(\frac{\omega}{2W})\} = \boldsymbol{F}^{-1}\{X_s(\omega)\} * \boldsymbol{F}^{-1}\{T\,p(\frac{\omega}{2W})\}$$

矩形パルス関数の逆フーリエ変換は、

$$\boldsymbol{F}^{-1}\{T\,p(\frac{\omega}{2W})\} = \frac{T}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{T}{2\pi}\left[\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\right]_{-W}^{W}$$

$$= \frac{T}{j2\pi t}\left(e^{jWt} - e^{-jWt}\right) = \frac{1}{Wt}\sin Wt$$

$$\because \quad T = \frac{\pi}{W}$$

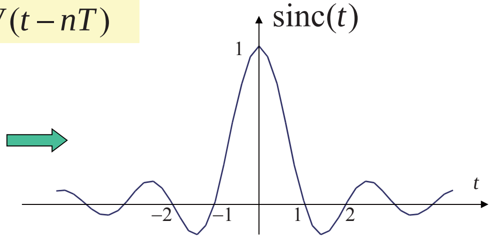
$$x_R(t) = x_s(t) * \frac{1}{Wt}\sin Wt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t') \frac{1}{W(t-t')} \sin W(t-t')\,dt'$$

$x_s(t')$ は $t' = nT$ 以外は $f_s(t') = 0$ なので、

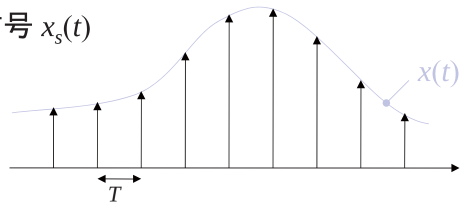
$$x_R(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin W(t-nT)}{W(t-nT)}$$

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

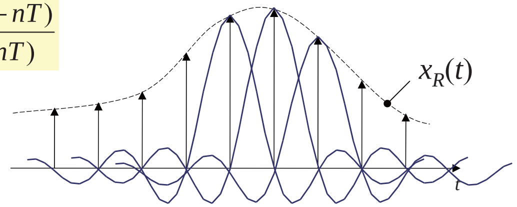


時間領域での再構成（フィルタリング）

サンプリングされた信号 $x_s(t)$



$$x_R(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{\sin W(t-nT)}{W(t-nT)}$$

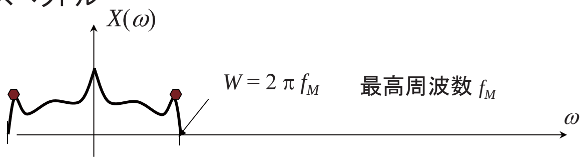


間を埋める ＝ 補間，内挿 (Interpolation)

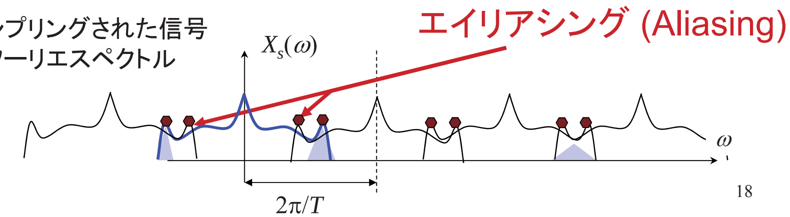
標本化定理を満たさない場合

$$\frac{1}{T}<2f_M$$

原信号のフーリエスペクトル

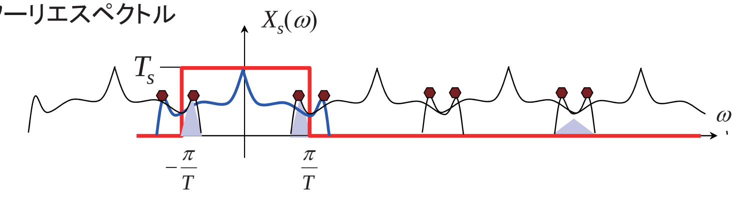


サンプリングされた信号のフーリエスペクトル



エイリアシングが生じた信号に対するフーリエ領域でのフィルタリング

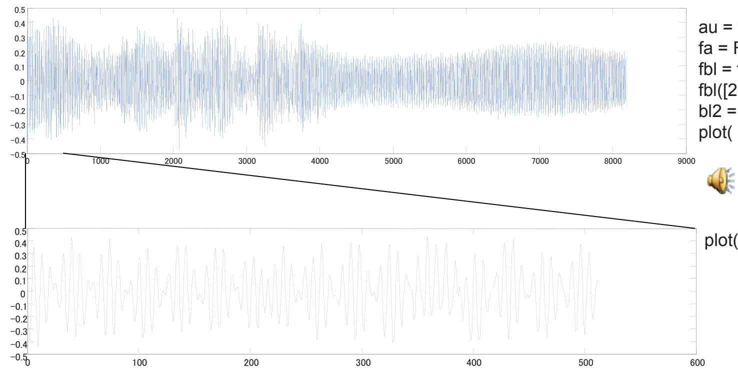
サンプリングされた信号のフーリエスペクトル



$$X_R(\omega)=X_s(\omega)\cdot T\,p\left(\frac{\omega}{2\pi/T}\right)$$

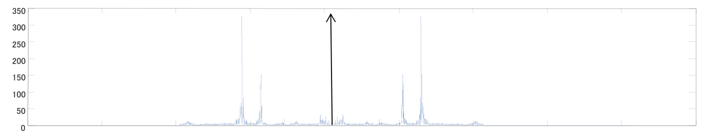
取り出された信号のフーリエスペクトル

５．６ 例

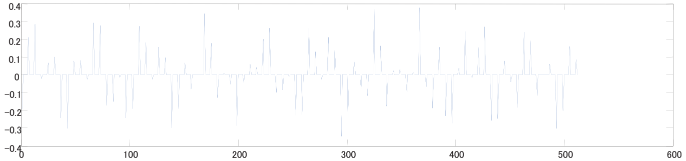


```
au = wavread( 'ring.wav');
fa = FFT( au );
fbl = fa;
fbl([2049:6144]) = 0;
bl2 = real( IFFT( fbl ));
plot( bl2 );
```

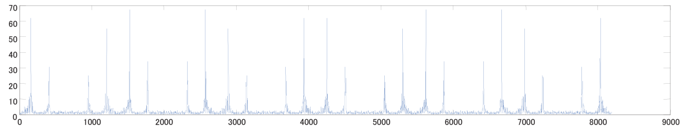
```
plot( bl2([1:512]) );
```



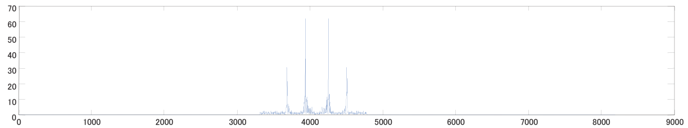
```
plot( fftshift( abs( fbl ) ) );
```



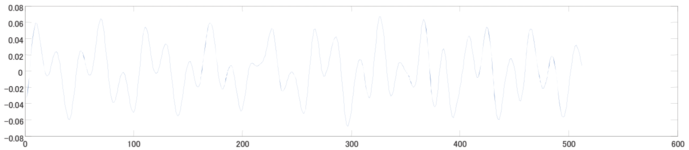
```
bls6( [1:8192] ) = 0;
bls6( [1:6:8192] ) =
    bl2( [1:6:8192] );
plot( bls6 );
```



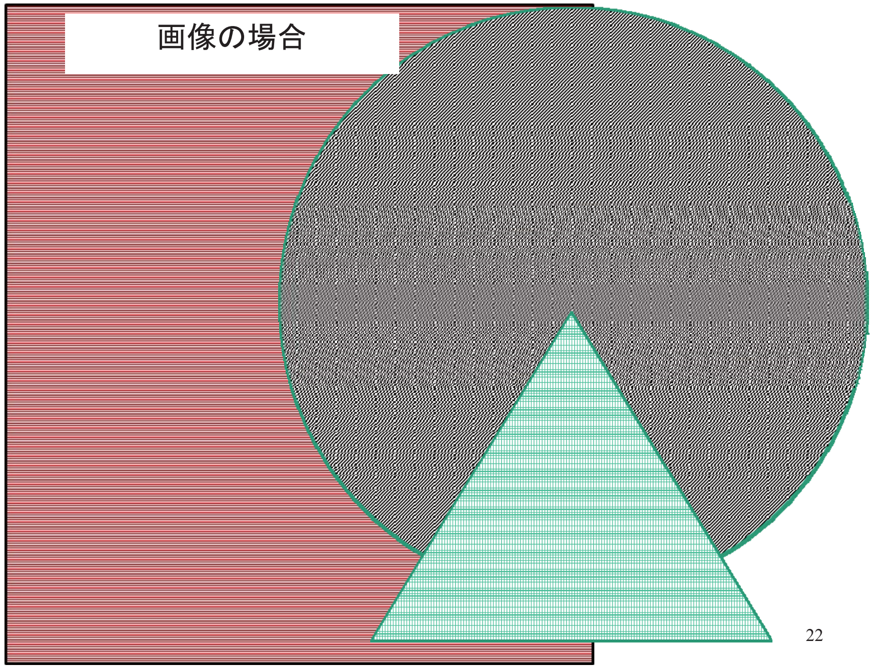
```
fbls6 = FFT( bls6 );
plot( fftshift( abs(fbls6)) );
```



```
fblr6 = fbls6;
fblr6([683:7508]) = 0;
plot( fftshift( abs(fblr6)) );
```

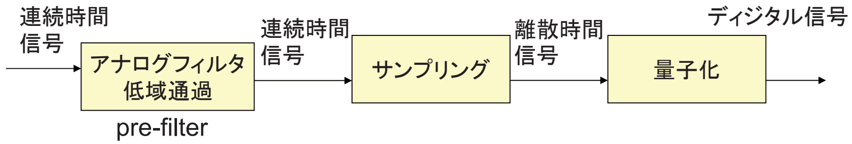


```
blr6 = real( IFFT( fblr6 ) );
plot( blr6 );
```

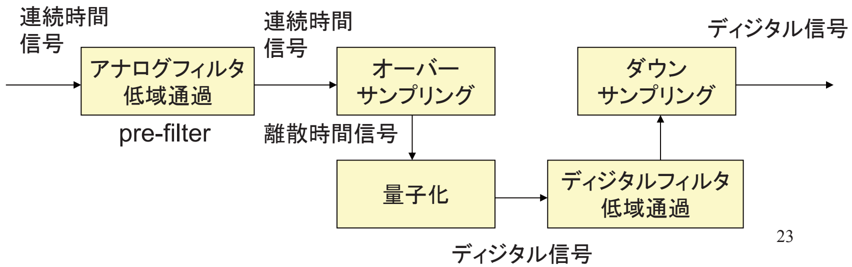



5．7 A/D変換，D/A変換

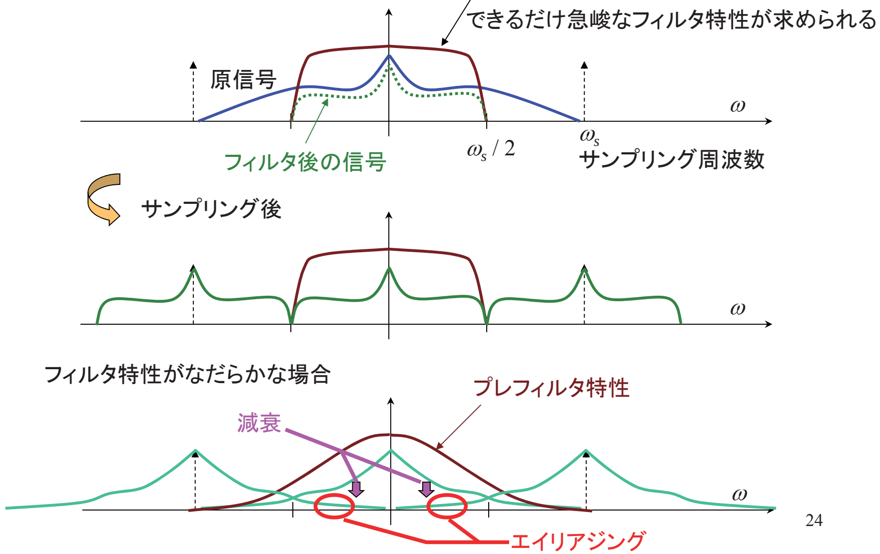
A/D変換



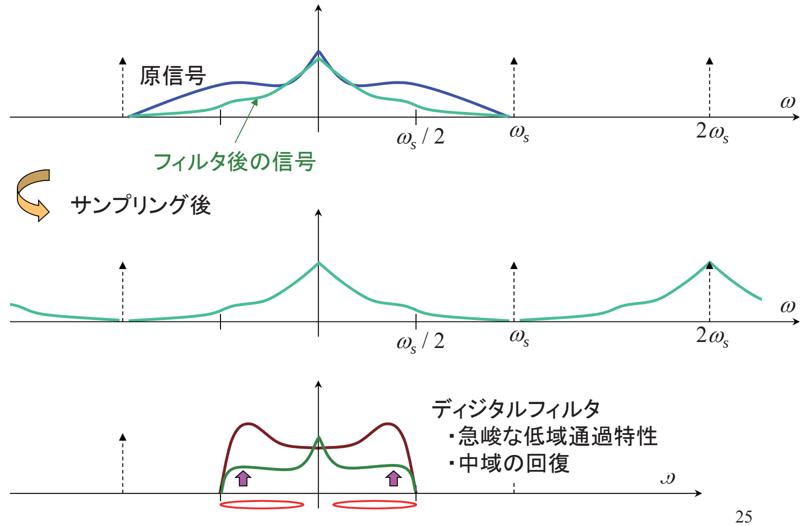
オーバーサンプリングA/D変換システム



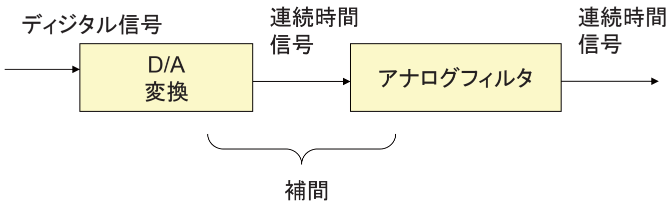
プレフィルタに求められる特性



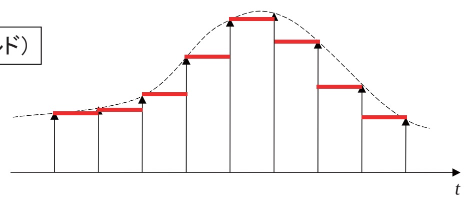
オーバーサンプリング



D/A変換



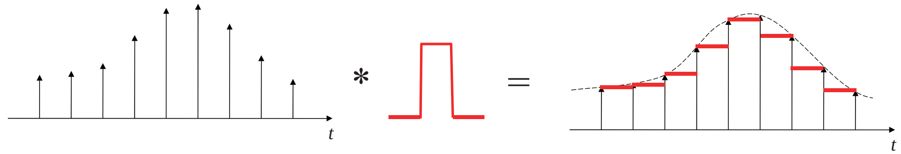
ホールド回路（0次ホールド）



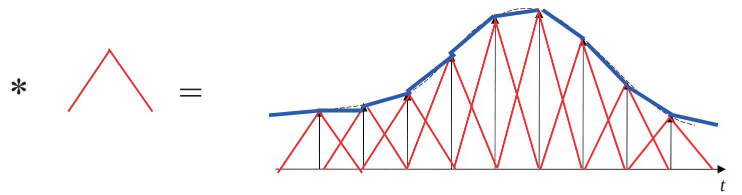
※　0次ホールドによって補間された連続時間信号のフーリエスペクトルはどのような特性となるか？

補間と畳み込み

0次ホールド（0次補間）　＝ 矩形パルス関数の畳み込み



線形補間（一次補間）　＝　Λ関数の畳み込み



5. 信号の標本化（サンプリング）：　まとめ

- 標本化定理を満たせば、元の連続時間信号を完全に再現できる
- 標本化周波数は、連続時間信号の最高周波数の2倍（ナイキストレート）より大きくなければならない
- 標本化された信号から連続時間信号を再現するには、低域通過フィルタを適用
- この場合の低域通過フィルタは内挿フィルタの役割
- 標本化定理を満たさない場合、エイリアシング歪みを生じる