

デジタル信号処理 (IV)

物理情報システム専攻
山口雅浩

E-mail: yamaguchi.m.aa@m.titech.ac.jp

Web: <http://www-oid.ip.titech.ac.jp>

講義内容

4 ラプラス変換

- ラプラス変換と線形システム
- ラプラス変換と伝達関数, インパルス応答

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

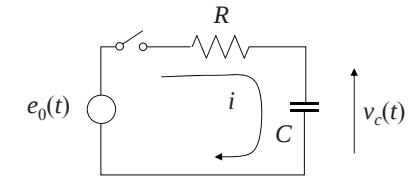
s 領域

時間領域

回路を信号処理システムとして見る

4. ラプラス変換

$i(0) = q(0) = 0$ とする

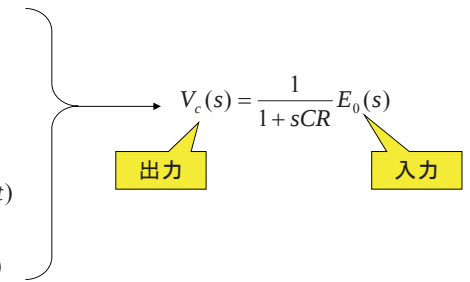


$$Ri(t) + v_c(t) = e_0(t)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv_c(t)}{dt} \text{ を代入すると}$$

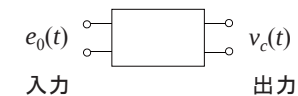
$$\text{回路方程式 } RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = e_0(t)$$

$$\text{ラプラス変換 } (RCs + 1)V_c(s) = E_0(s)$$



p.65-71

ラプラス変換と線形システム



$$V_c(s) = \frac{1}{sCR + 1} E_0(s) = H(s) E_0(s)$$

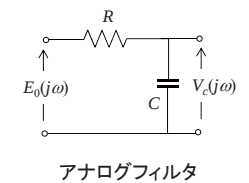
$H(s)$ 伝達関数

$$H(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

$s = j\omega$ と置き換える

$H(\omega)$ 周波数特性

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$



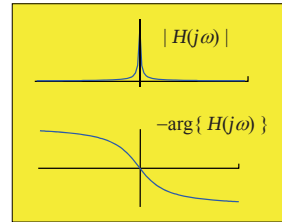
ラプラス変換と周波数特性

- 伝達関数(ラプラス変換の定義)

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

- 周波数伝達関数(フーリエ変換)

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$



- インパルス応答 $h(t)$ が因果的 ($h(t) = 0$ for $t < 0$) で、
 $s = j\omega$ ならば両者は一致

→ ラプラス変換により得られる伝達関数で、 $s = j\omega$ とすることで、周波数特性が得られる。

5

ラプラス変換とインパルス応答

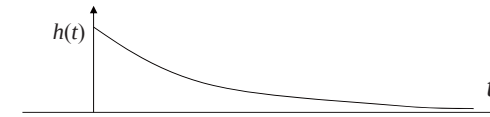
$$H(s) = \frac{\mathcal{L}\{\text{零状態応答}\}}{\mathcal{L}\{\text{入力}\}} = \mathcal{L}\{\text{インパルス応答}\}$$

伝達関数を逆ラプラス変換することでインパルス応答を求めることができる

$$e^{-at} \text{ のラプラス変換 } \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a}$$

$$H(s) = \frac{1}{RCs+1} = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + 1/RC} \quad \text{の逆ラプラス変換は}$$

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-(1/RC)t} \quad \leftarrow \text{インパルス応答}$$



7

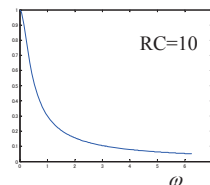
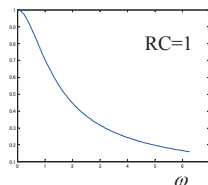
ラプラス変換と周波数特性

周波数特性 $H(\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$

振幅特性 $|H(\omega)| = \left\{ \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{1}{1 - j\omega RC} \right\}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC)^2 \omega^2}}$

位相特性 $\arg\{H(\omega)\}$

振幅特性



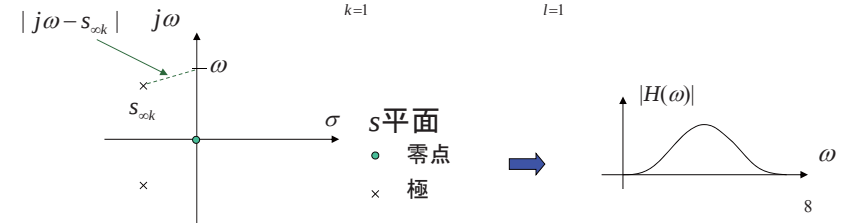
6

- 零点 s_{0k} , 極 $s_{\infty l}$ から周波数伝達特性を求めることが可能

$$H(s) = A \frac{(s-s_{01})(s-s_{02})\cdots(s-s_{0K})}{(s-s_{\infty 1})(s-s_{\infty 2})\cdots(s-s_{\infty L})}$$

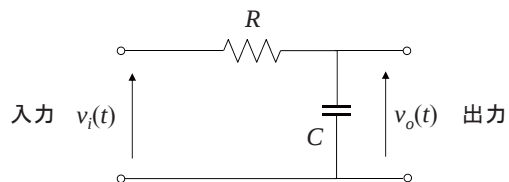
振幅特性 $|H(\omega)| = A \frac{|j\omega - s_{01}| |j\omega - s_{02}| \cdots |j\omega - s_{0K}|}{|j\omega - s_{\infty 1}| |j\omega - s_{\infty 2}| \cdots |j\omega - s_{\infty L}|}$

位相特性 $\arg\{H(j\omega)\} = \arg\left\{A \frac{(j\omega - s_{01})(j\omega - s_{02})\cdots(j\omega - s_{0K})}{(j\omega - s_{\infty 1})(j\omega - s_{\infty 2})\cdots(j\omega - s_{\infty L})}\right\}$
 $= \sum_{k=1}^K \arg(j\omega - s_{0k}) - \sum_{l=1}^L \arg(j\omega - s_{\infty l})$



8

例1



$$RC \frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = v_i(t)$$

ラプラス変換 $(RCs + 1)V_o(s) = V_i(s)$

$$V_o(s) = \frac{1}{sRC + 1} V_i(s) = H(s) V_i(s)$$

$$H(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

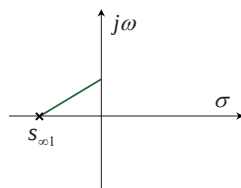
伝達関数

ラプラス逆変換

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-(1/RC)t}$$

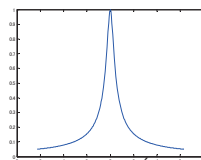
インパルス応答

極 $s = -\frac{1}{RC}$
零点なし

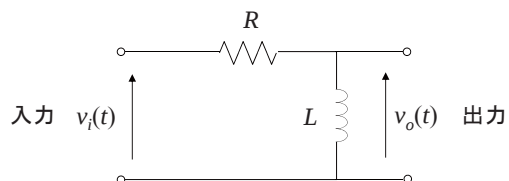


◆ 振幅特性は $j\omega$ 軸上において極までの距離の逆数に比例

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC)^2 \omega^2}}$$



例2



$$v_o(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad v_o(t) + Ri(t) = v_i(t)$$

ラプラス変換 $V_o(s) = sLI(s)$

$$V_o(s) + RI(s) = V_i(s)$$

$$(1 + \frac{R}{sL})V_o(s) = V_i(s)$$

$$V_o(s) = \frac{sL}{R + sL} V_i(s) = \frac{s}{s + (R/L)} V_i(s)$$

$$H(s) = \frac{s}{s + (R/L)}$$

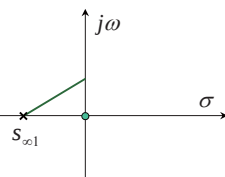
伝達関数

ラプラス逆変換

$$h(t) = \delta(t) - \frac{R}{L} e^{-(R/L)t}$$

インパルス応答

極 $s = -\frac{R}{L}$
零点 $s = 0$



◆ $\omega = 0$ のとき振幅特性は 0
 ω の絶対値が大きいほど極から離れる
→ 振幅特性は 1 に漸近

$$|H(\omega)| = \frac{(R/L)|\omega|}{\sqrt{1 + (R/L)^2 \omega^2}}$$

