ディジタル信号処理
(III)

物理情報システム専攻
山口雅浩

E-mail: *yamaguchi.m.aa@m.titech.ac.jp*

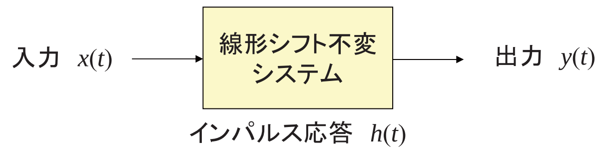
Web: *http://www-oid.ip.titech.ac.jp*

講義内容

3. 連続時間システムのフーリエ解析
   - フーリエ変換による線形シフト不変システムの解析
   - インパルス応答と周波数特性

３. 連続時間システムのフーリエ解析

３．１　フーリエ変換による線形シフト不変システムの解析



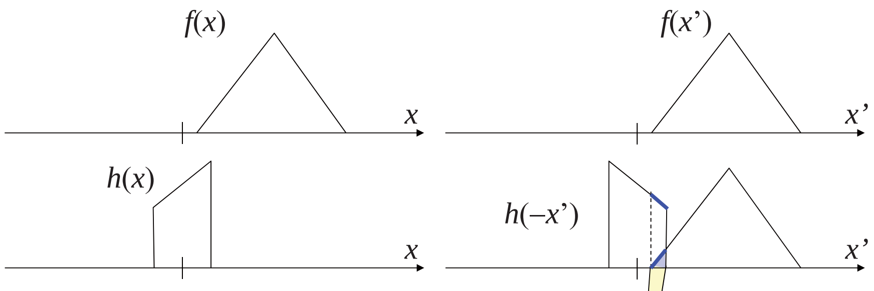
線形シフト不変システムの入出力関係

$$y(t) = S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

→ 畳込み積分（ convolution ）

なぜ「たたみ込み」が重要か？

- 線形シフト不変システムの数学的記述
  - 回路・空間伝播などによる信号の劣化
  - レンズや空間的な光伝播、投影などによるイメージング系
- ２つの関数の積のフーリエ変換
  - ２つの関数のたたみ込みのフーリエ変換は積になる
- フィルタリング
  - 周波数フィルタリング（High-pass, Low-pass, Band-pass, ...）
  - 平滑化、鮮鋭化、エッジ強調、など
- 「相関演算」と類似
  - パターンマッチングなどへの応用



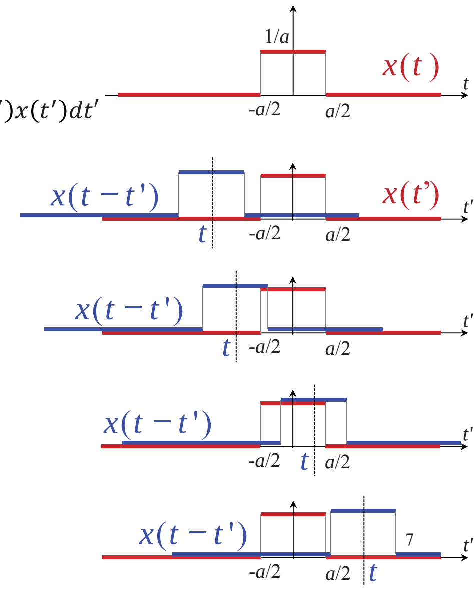
$$h(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-x')f(x')dx'$$

$$x = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} h(-x')f(x')dx'$$

例：2つの矩形パルス関数の畳み込み

$$x(t) = \frac{1}{a}\, p\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$f(t) = a\, x(t) * x(t) = a\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t')x(t')dt'$$

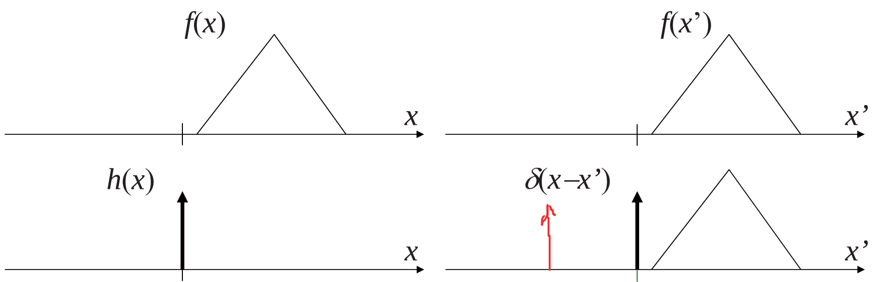


$t < -a$ のとき $f(t) = 0$

$-a \le t < 0$ のとき $f(t) = 1 + t/a$

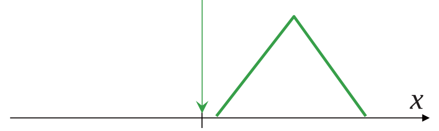
$0 \le t < a$ のとき $f(t) = 1 - t/a$

$t \ge a$ のとき $f(t) = 0$

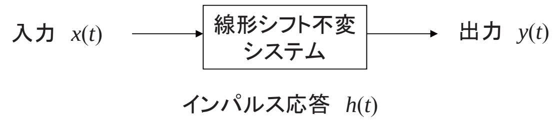


$$\delta(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')f(x')dx'$$

$$= f(x)$$



インパルス応答と周波数特性



- 線形シフト不変システム

$$y(t) = S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

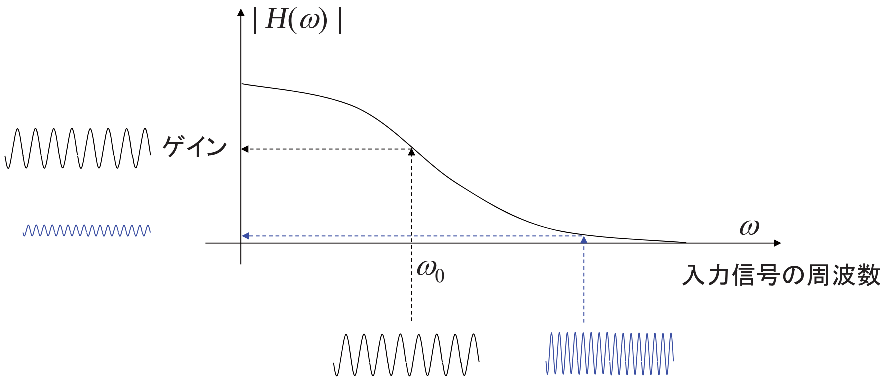
- 両辺をフーリエ変換

$$Y(\omega) = \boldsymbol{F}\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\} = \boldsymbol{F}\{x(t)\}\boldsymbol{F}\{h(t)\}$$
$$= H(\omega)X(\omega)$$

$H(\omega)$: 周波数特性，システム関数，伝達関数，

= インパルス応答のフーリエ変換

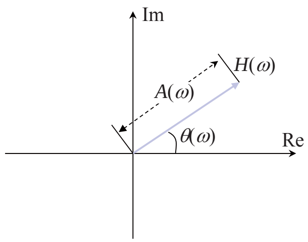
周波数特性



$$|Y(\omega)| = |H(\omega)||X(\omega)| = A(\omega)|X(\omega)|$$

周波数特性は複素数

$$H(\omega) = \mathrm{Re}\{H(\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{H(\omega)\}$$
$$= A(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$



- 振幅特性　$A(\omega) = |H(\omega)|$

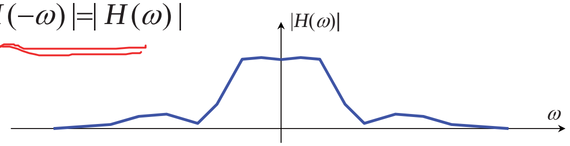
  $|Y(\omega)| = |H(\omega)|\,|X(\omega)| = A(\omega)\,|X(\omega)|$

- 位相特性　$\theta(\omega)$

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{-j\xi(\omega)}$$
$$Y(\omega) = |Y(\omega)|e^{-j\eta(\omega)}$$ とすると
$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = A(\omega)|X(\omega)|e^{-j\{\theta(\omega)+\xi(\omega)\}}$$

$$\eta(\omega) = \xi(\omega) + \theta(\omega)$$

- インパルス応答 $h(t)$ が実数のとき、振幅特性は原点対称（偶関数）: $|H(-\omega)| = |H(\omega)|$

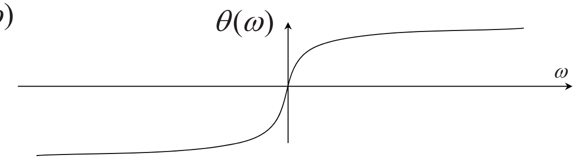


- 上を証明せよ。

$$H(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j(-\omega)t}dt$$

- インパルス応答 $h(t)$ が実数のとき、位相特性は奇関数

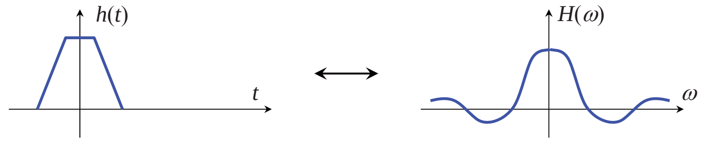
$$\theta(-\omega) = -\theta(\omega)$$



- 上を証明せよ。

$$H(-\omega) = A(-\omega)e^{j\theta(-\omega)}$$
$$H^*(\omega) = A(\omega)e^{-j\theta(\omega)}$$

- インパルス応答が実数で対称(偶関数)なとき: $h(t) = h(-t)$
  周波数特性は実数で対称

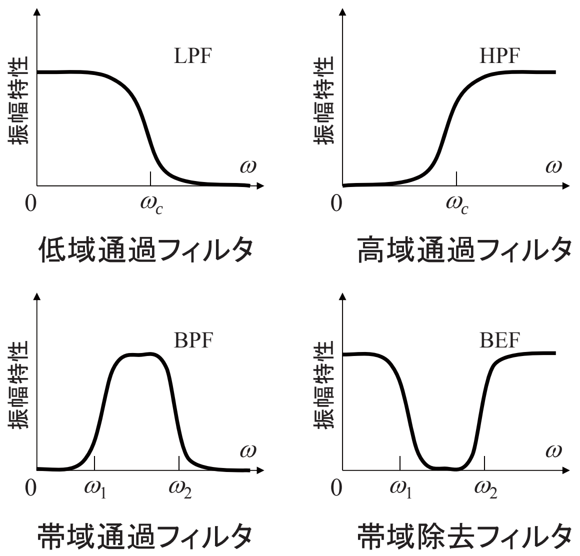


- 上を確かめよ

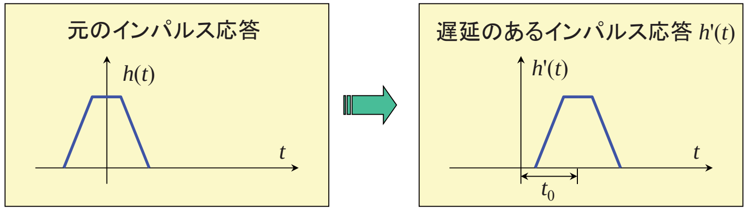
したがって

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cos\omega t \ dt = H(-\omega)$$

フィルタの種類



- インパルス応答に遅延があるとき



$$h'(t) = h(t-t_0)$$

$$\begin{aligned} H'(\omega) &= \boldsymbol{F}\{h'(t)\} \\ &= \boldsymbol{F}\{h(t-t_0)\} \\ &= \boldsymbol{F}\{h(t)\}\ e^{-j\omega t_0} = H(\omega)e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

$H(\omega)$に対して ωt_0 なる位相特性を付加したもの

ωに比例する位相特性:直線位相

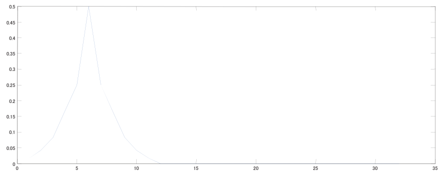
例題

任意の周波数の正弦波入力 $x(t) = A\cos(\,2\,\pi\,a\,t\,)$ に対して $y(t) = A\cos(\,2\,\pi\,a\,t - \phi\,)$ を出力するシステムの周波数特性を求めよ

周波数フィルター

Matlab code（参考）

$h(t)$

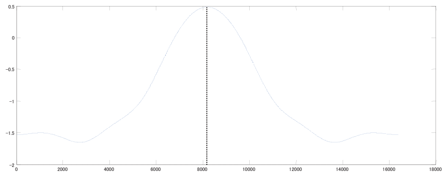


```
filt = [0.2 0.5 1 2 3 6 3 2 1 0.5 0.2 ] / 12;

delta = zeros(16384, 1);
delta(1) = 1;
ir = conv(delta, filt);
plot(ir([1:32]));
```

$\log(\,|\,H(\omega)\,|\,)$

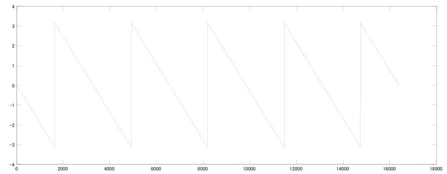
振幅特性



```
tf = fft(ir);
plot( fftshift(log(abs(tf))));
```

$\theta(\omega)$

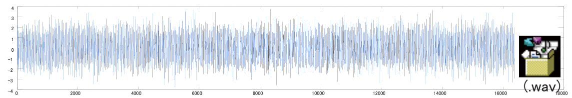
位相特性



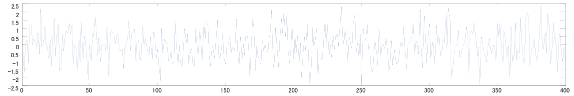
```
ptf = imag(log(tf));
plot(ptf);
```


ノイズ

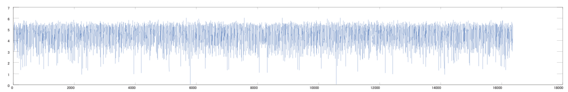
$n(t)$




```
n = randn(16384,1);
plot(n);
plot(n([1:400]));
```

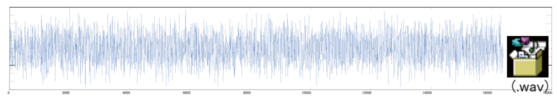


$\boldsymbol{F}\{n(t)\}$

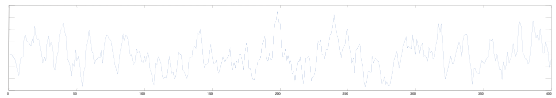


```
fn = fft(n);
plot( fftshift(log(abs(fn))));
```

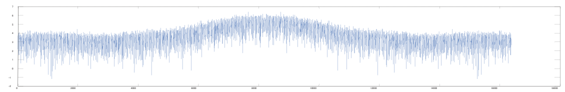
$o_n(t)$
$= n(t) * h(t)$




```
nc = conv(n,filt);
wavwrite(nc, 'noisec.wav');
plot(nc);
plot(nc([1:400]));
```



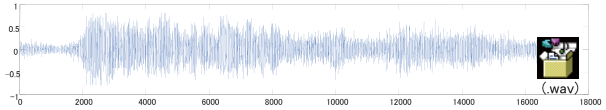
$\boldsymbol{F}\{o_n(t)\}$



```
fnc = fft(nc);
plot( fftshift(log(abs(fnc))));
```

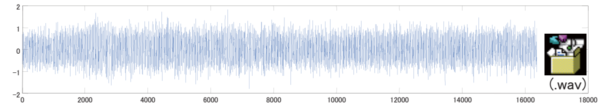

Audio

$y(t)$



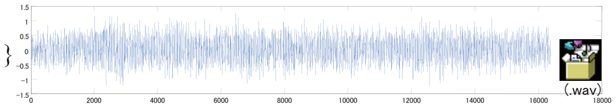

```
load handel
yy = y([1:16384]);
plot(yy);
wavwrite(yy, 'halle.wav');
```

$y(t)+n(t)$



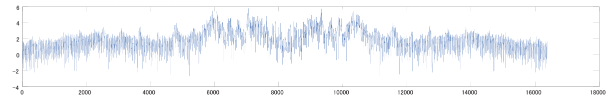

```
yn = yy + n*0.4;
plot(yn);
wavwrite(yn, 'hallen.wav');
```

$o(t) =$
$\{\ y(t)+n(t)\ \}$
$*\ h(t)$



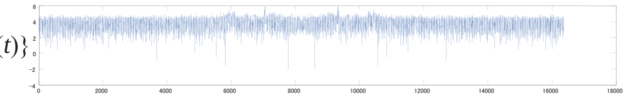

```
yc = conv(yn,filt);
plot(yc);
wavwrite(yc, 'hallec.wav');
```

$\boldsymbol{F}\{y(t)\}$



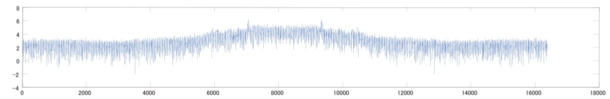
```
fty = fft(yy);
plot( fftshift(log(abs(fty))));
```

$\boldsymbol{F}\{y(t)+n(t)\}$



```
ftyn = fft(yn);
plot( fftshift(log(abs(ftyn))));
```

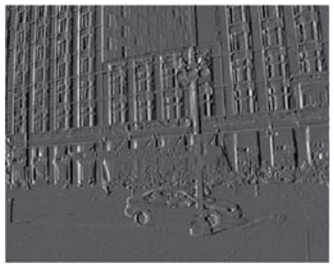
$\boldsymbol{F}\{o(t)\}$

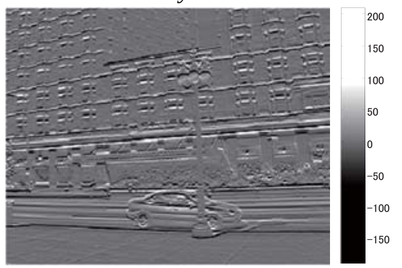


```
ftyc = fft(yc);
plot( fftshift(log(abs(ftyc))));
```


画像のエッジ抽出

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$



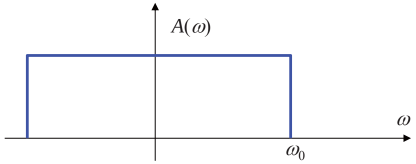


Original

勾配の絶対値

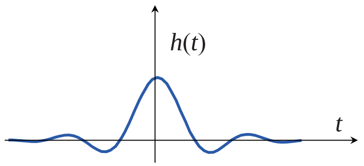
$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

理想低域通過フィルタ



$$A(\omega) = |H(\omega)| = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\boldsymbol{F}^{-1}\{A(\omega)\} = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}$$

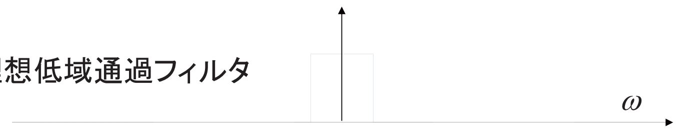


$h(t-t_0)$ $\longrightarrow$ $\boxed{t_0 \;\to\; \infty}$

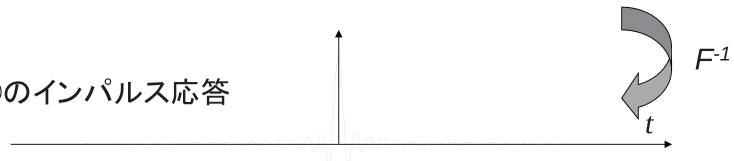
因果的なフィルタにするには

$h(t)$ を有限の領域でクリップする必要がある → 理想低域通過フィルタは得られない

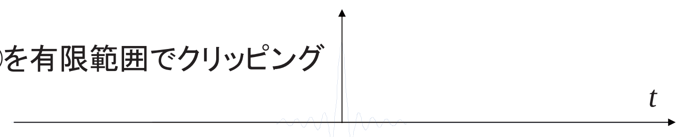
①:理想低域通過フィルタ



②:①のインパルス応答

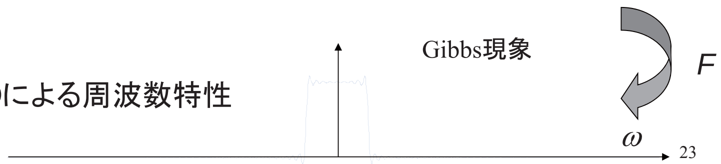


③:②を有限範囲でクリッピング

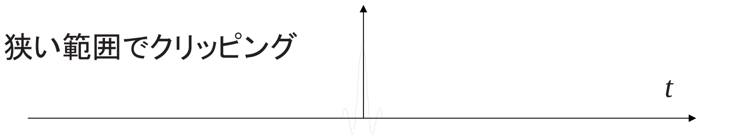


④:③による周波数特性

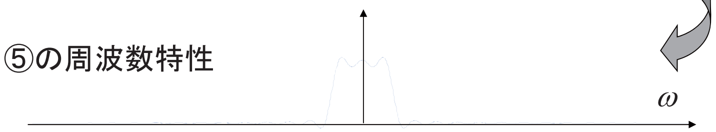
Gibbs現象



⑤:狭い範囲でクリッピング



⑥:⑤の周波数特性

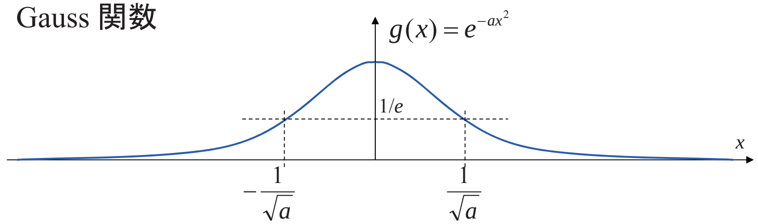


MATLABの場合（FFT使用）

```
xf([1:1024]) = 0;
xf([1:48]) = 1;
xf([(1024-47):1024]) = 1;
plot( fftshift(xf));
axis( [1 1024 0 2] );
psf = ifft( xf );
plot( fftshift(real(psf)) );
axis( [1 1024 -0.05 0.1] );
cpsf([1:1024])=0;
cpsf([1:100])=real(psf([1:100]));
cpsf([(1024-99):1024])=real(psf([(1024-99):1024]));
plot( fftshift(cpsf) );
axis( [1 1024 -0.05 0.1] );
```

```
frq = fft( cpsf );
plot( fftshift( real( frq )) );
axis( [1 1024 -1 2] );
cpsf([1:1024])=0;
cpsf([1:30])=real(psf([1:30]));
cpsf([(1024-29):1024])=real(psf([(1024-29):1024]));
plot( fftshift(cpsf) );
axis( [1 1024 -0.1 0.3] );
frq1 = fft( cpsf );
plot( fftshift( real( frq1 )) );
axis( [1 1024 -1 2] );
```


Gauss 関数



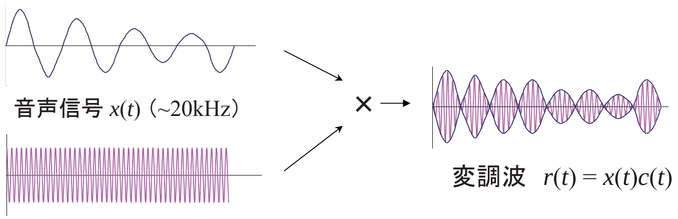
Gauss 積分 $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

正規化されたGauss 関数（積分値＝1） $g_n(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot e^{-ax^2}$

$a \to \infty$ とすることで、Dirac デルタ関数となる。 $\delta(x) = \lim_{a\to\infty}\left(\sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot e^{-ax^2}\right)$

$g(x) = e^{-ax^2}$ **で $a \to 0$ とすると、$g(x) = 1$ となる。**

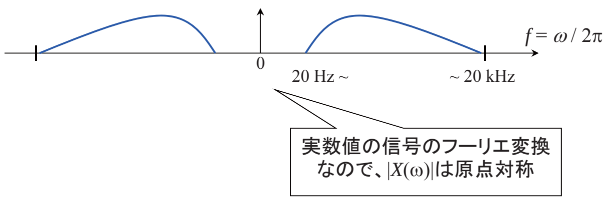
補足
AMラジオ （Amplitude Modulation, 振幅変調）



搬送波 $c(t)$（数百kHz ~ 数MHz） $c(t)=\cos 2\pi f_c t$

f_c：キャリア周波数

音声信号のスペクトル $|X(\omega)|$

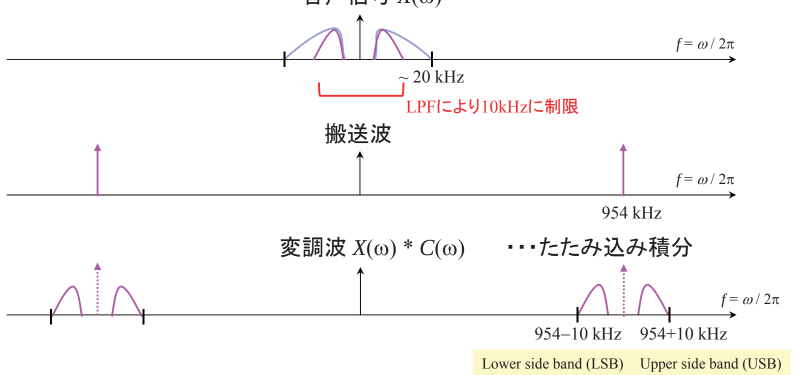


フーリエ領域で見ると

音声信号 $X(\omega)$

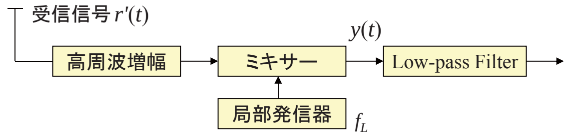
搬送波 $C(\omega)=\pi\{\delta(\omega-2\pi f_c)+\delta(\omega+2\pi f_c)\}$

変調波 $\boldsymbol{F}\{x(t)c(t)\}=\dfrac{1}{2\pi}X(\omega)*C(\omega)=\dfrac{1}{2}\{X(\omega-2\pi f_c)+X(\omega+2\pi f_c)\}$



帯域幅 = 20kHz

復調（ヘテロダイン方式の原理）



$q(t)=\cos 2\pi f_L t$

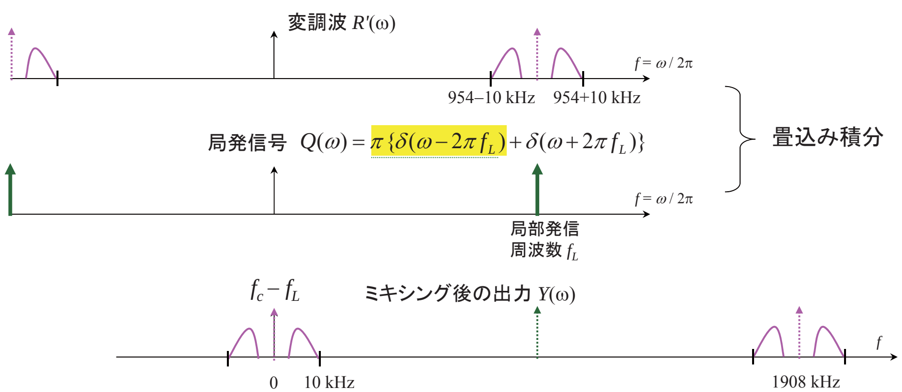
$Q(\omega)=\pi\{\delta(\omega-2\pi f_L)+\delta(\omega+2\pi f_L)\}$

ミキシング後の出力

$y(t)=r'(t)\,q(t)$

$$Y(\omega)=\boldsymbol{F}\{r'(t)q(t)\}=\frac{1}{2\pi}R'(\omega)*Q(\omega)=\frac{1}{2}\{R'(\omega-2\pi f_L)+R'(\omega+2\pi f_L)\}$$

復調（ヘテロダイン方式の原理）



$f_c-f_L=0$ ならば 10kHz以上を除去する低域通過フィルタ(LPF)
により原信号を得ることができる
（ホモダイン検波）

$f_c-f_L=f_{IF}$ f_{IF}：中間周波数（スーパーヘテロダイン検波）