ディジタル信号処理
(II)

物理情報システム専攻
山口雅浩

E-mail: *yamaguchi.m.aa@m.titech.ac.jp*

Web: *http://www-oid.ip.titech.ac.jp*

教科書3.1~3.4

講義内容

- 信号を数式で表す
- 「システム」とは？　線形システム、LTIシステム
- 複素正弦波表記に慣れよう
- フーリエ変換を直感的に理解しよう

１．連続時間信号とシステム

- 連続時間信号　$x(t)$
- 離散時間信号　$x(nT_0)$ または $x(n)$
- 信号処理システム

$$\text{入力 } x \longrightarrow \boxed{\text{システム}} \longrightarrow \text{出力 } y$$

- 連続時間システム　$y(t) = S\{\, x(t) \,\}$
- 線形連続時間システム　$y(t) = \int x(\tau) h(\tau, t) d\tau$
- 線形シフト不変連続時間システム　$y(t) = \int x(\tau) h(t-\tau) d\tau$

１．１　連続時間信号

- 連続時間信号　$x(t)$
- 正弦波信号

  $x(t) = A \sin(\ \omega t + \theta)$

  A : 振幅

  $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$: 角周波数

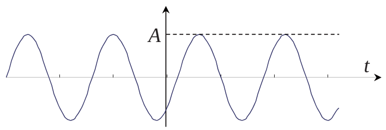
  f : 周波数

  T : 周期

  θ : 位相

  $\lambda = v / f$: 波長

  $k = 2\pi / \lambda = \omega / v$: 波数



- 周波数
  - 時間周波数　Hz ([cycle/sec, sec^{-1}])

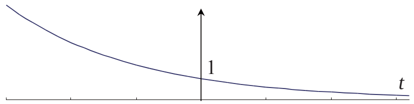
    周期 [sec],　位相[rad],　波長[m],　波数[rad/m],　角周波数[rad/sec]
  - 空間周波数　cycle / m

※　波長500nmの光（緑色光）の周波数はいくらか

時間信号の例

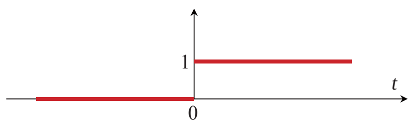
- 指数信号

  $x(t) = e^{-at}$



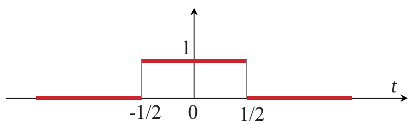
- ステップ信号

$$x(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



- 矩形（方形）パルス信号

$$x(t) = p(t) = \begin{cases} 0 & |t| \geq 1/2 \\ 1 & |t| < 1/2 \end{cases}$$

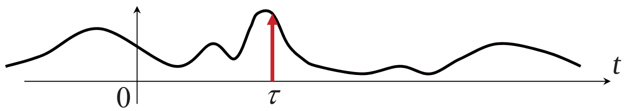


（ 厳密には、$t = 1/2$ のとき $p(t) = 0.5$ ）

p.56

Diracのデルタ関数

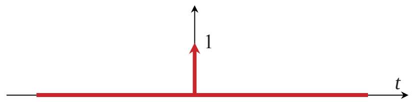
$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t-\tau)dt = \phi(\tau)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)dt = \phi(0)$$

$$\delta(t) = 0 \quad \text{if} \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

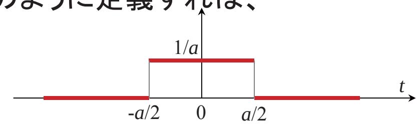


単位インパルス信号

- 矩形パルス関数は $\int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = 1$

  幅 a の矩形パルス関数を以下のように定義すれば、

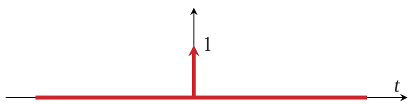
$$p_a(t) = \frac{1}{a} p\left(\frac{t}{a}\right)$$



  上と同様、$\int_{-\infty}^{\infty} p_a(t)dt = 1$

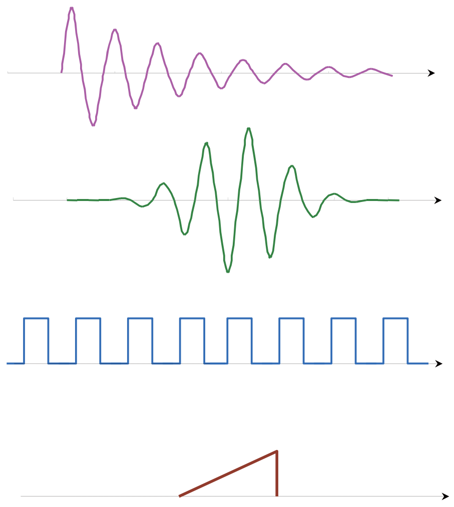
- 単位インパルス関数 ＝ Diracのデルタ関数 $\delta(t)$

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} p_a(t) \quad ※$$



※　他の定義の方法（ガウス関数、sinc関数など）もある

解析的に表すことのできる信号の例



$x(t)=e^{-at}\sin(bt)$

$x(t)=e^{-at^2}\sin(bt)$

$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}p(\frac{t-nb}{a})$

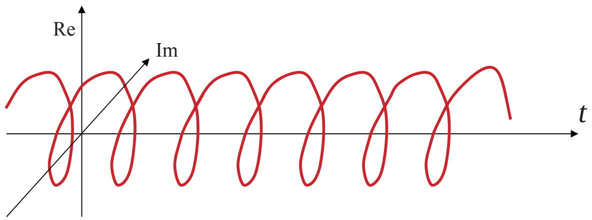
$x(t)=b\,p(\frac{t}{a})t$

複素正弦波

$$x(t)=Ae^{j(\omega t+\phi)}=Ae^{j(2\pi ft+\phi)}=Ae^{j\omega t}e^{j\phi}$$

$$=A\{\cos(\omega t+\phi)+j\sin(\omega t+\phi)\}$$

$$\mathrm{Re}\{x(t)\}=A\cos(\omega t+\phi)$$



１．２　線形システム

p.60

- 連続時間システム　$y(t)=S\{\,x(t)\,\}$
- 以下の(1)(2)が成り立つシステム$S\{\}$を**線形システム**と言う。
  (1)　$S\{\,a\,x(t)\,\}=a\,y(t)$
  (2)　$y_1(t)=S\{\,x_1(t)\,\}$,　$y_2(t)=S\{\,x_2(t)\,\}$　のとき、
  $S\{\,x_1(t)+x_2(t)\,\}=S\{\,x_1(t)\,\}+S\{\,x_2(t)\,\}=y_1(t)+y_2(t)$

入力 $a_1x_1+a_2x_2$ ⟶ **線形システム** ⟶ 出力 $a_1y_1+a_2y_2$

- 線形連続時間システム $y(t)=S\{\,x(t)\,\}$の入出力関係は以下の式で書くことができる

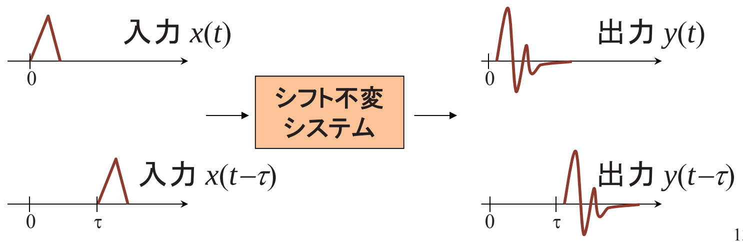
$$y(t)=\int x(\tau)h(\tau,t)d\tau$$

$h(\tau,t)$はシステムの入出力特性を表す関数（インパルス応答）

- 線形でないシステムを**非線形システム**と言う

シフト不変システム

- 連続時間システム　$y(t)=S\{\,x(t)\,\}$
- 任意の時間 τだけシフトした入力に対して、出力の形は変わらずに同じ時間だけシフトする、すなわち、
  $y(t-\tau)=S\{\,x(t-\tau)\,\}$
  となるとき、そのシステムを**時不変システム**、または**シフト不変システム**と言う



線形シフト不変システム

- 線形シフト不変システムは以下の式で表せる

$$y(t) = S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$h(t)$は**インパルス応答**。
上記システムに単位インパルス $\delta(t)$ を入力したとき、
その出力は、

$$y(t) = S\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)h(t-\tau)d\tau = h(t)$$ ※ デルタ関数の性質より

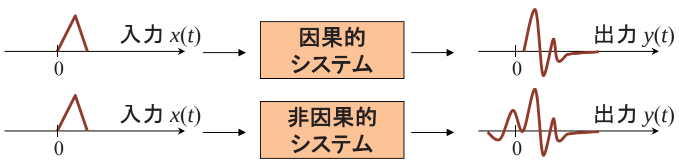
- 線形シフト不変システムの式 (#) は「畳込み積分」（後述）

Linear, Time-Invariant System = LTI System

因果的システム

- 入力の与えられる時間以前に出力は変化しない性質を因果的（Causal）と言う。

- インパルス応答 $h(t)$ が $t<0$ で $h(t)=0$ となるシステムを、因果的システムと呼ぶ。



- 時間信号を扱うシステムは必ず因果的である。
- 画像などのような空間領域の信号の場合には、因果的か非因果的かは本質的には意味は無い。

2　フーリエ変換

p.48

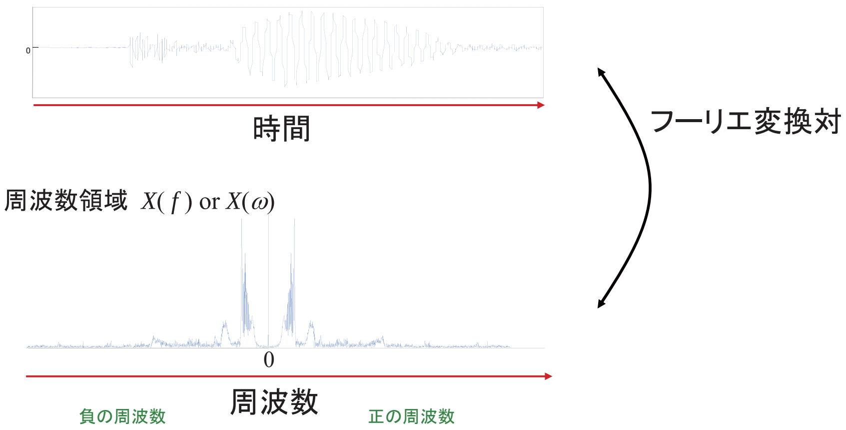
- 信号をフーリエ変換　$x(t) \rightarrow X(\omega)$
  - 信号の周波数特性
  - ノイズの特性
  - サンプリング定理
  - 畳込みの計算
  - テンプレートマッチング（相互相関）の計算

- インパルス応答のフーリエ変換　$h(t) \rightarrow H(\omega)$
  - システムの周波数特性
    - ex.イコライザー、フィルターの設計、周波数フィルタリング
  - 信号劣化の解析
  - 畳込みの計算

2．1　時間領域と周波数領域

時間領域　$x(t)$

周波数領域　$X(f)$ or $X(\omega)$



フーリエ級数展開

- 周期Tの周期信号 $x(t)$

  $x(t) = x(t - T)$

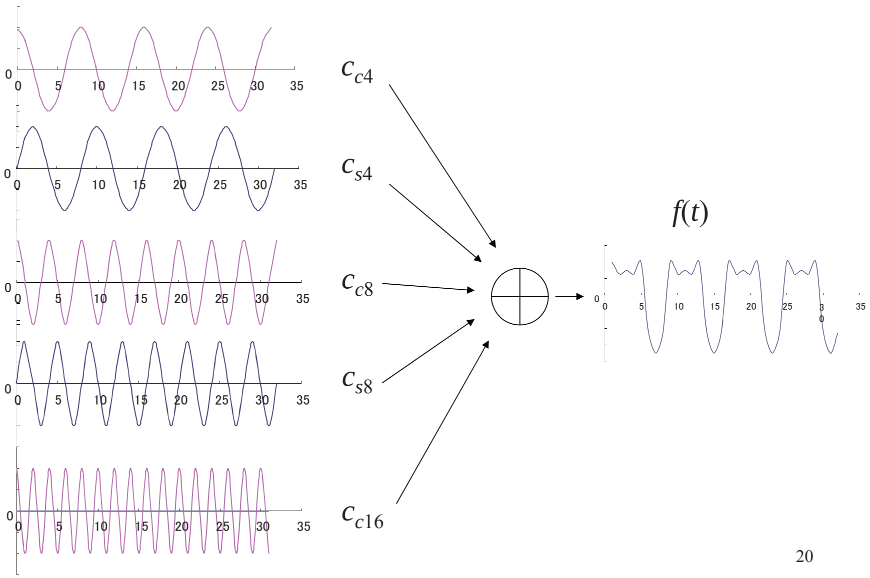
  は、角周波数　$\omega_0 = 2\pi / T$ を用いて、

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{jn\omega_0 t}$$

  とフーリエ級数展開の形式で表すことができる。ただし、

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

  c_n はフーリエ係数（複素数）



フーリエ変換

- 一般的な関数　$f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

- $f(t)$ は $F(\omega)$ の逆フーリエ変換により以下で与えられる

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

フーリエ変換が存在する十分条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

$f(t)$が区分的に連続（不連続点が有限個）

$F(\omega)$ について

- $f(t)$ が実数であっても $F(\omega)$ は一般に複素数

$$F(\omega) = \mathrm{Re}\{F(\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{F(\omega)\}$$
$$= A(\omega)\, e^{j\phi(\omega)}$$

$A(\omega)$:　振幅，振幅スペクトル

$\phi(\omega)$　：位相、位相角、位相スペクトル

複素共役

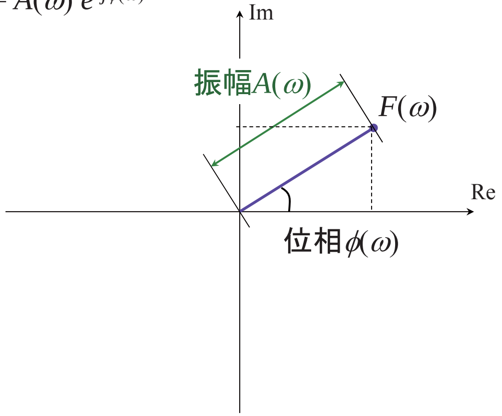
$$|F(\omega)|^2 = F(\omega)\, F^*(\omega) = A^2(\omega)$$

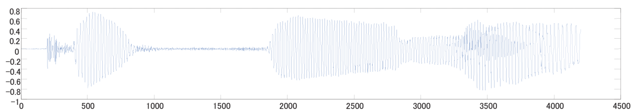
$A^2(\omega)$: エネルギースペクトル、パワースペクトル

複素平面（Gauss平面）で見たフーリエスペクトル

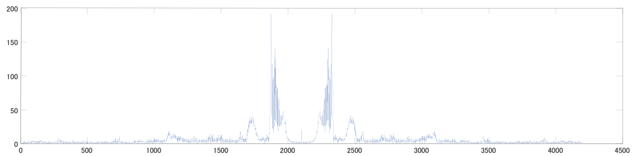
- あるーつの ω に着目

$$F(\omega) = \mathrm{Re}\{F(\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{F(\omega)\}$$
$$= A(\omega)\, e^{j\phi(\omega)}$$

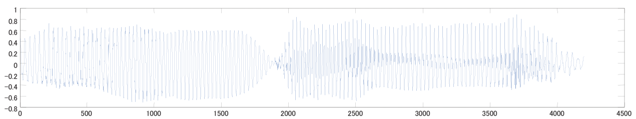




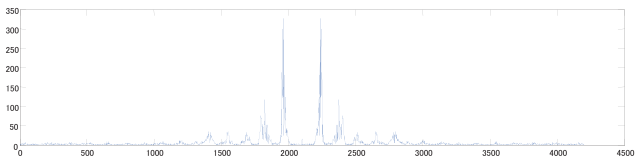
[1] 音声（前半）



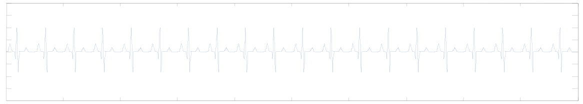
[2] [1]のフーリエ変換（振幅）



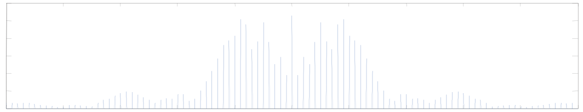
[3] 音声（後半）



[4] [3]のフーリエ変換（振幅）

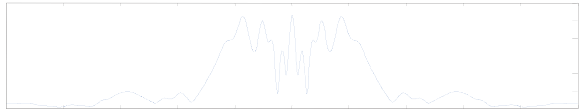


[1] 心電図波形（模擬データ）

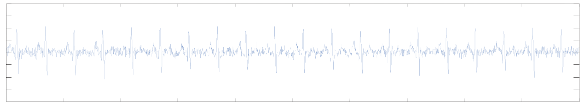


[2] [1]のフーリエ変換（振幅）

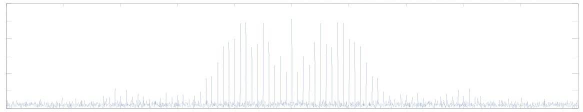
[3] [1]の１周期分



[4] [3]のフーリエ変換（振幅）



[5] [1]にノイズ付加



[6] [5]のフーリエ変換（振幅）

２．２ フーリエ変換の性質

p.50

(1) 線形性

a, b を任意の定数とする

$$\boldsymbol{F}\{\, a f_1(t) + b f_2(t) \,\} = a\boldsymbol{F}\{ f_1(t) \} + b\boldsymbol{F}\{ f_2(t) \}$$

(2) 時間軸の推移

$$\boldsymbol{F}\{ f(t-a)\} = F(\omega)e^{-ja\omega}$$

直線位相

(3) 時間軸の伸縮

$$\boldsymbol{F}\{ f(at)\} = \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a})$$

(4) 周波数軸の推移

$$\boldsymbol{F}^{-1}\{F(\omega-a)\} = f(t)e^{jat}$$

(5) 周波数軸の伸縮

$$\boldsymbol{F}^{-1}\{F(a\omega)\} = \frac{1}{|a|} f(\frac{t}{a})$$

(6) 対称性

$$\boldsymbol{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega)$$

(7) 複素共役

$$\boldsymbol{F}\{f^*(t)\} = F^*(-\omega) \qquad f^*(t) = \boldsymbol{F}\{F^*(\omega)\}$$

$$\boldsymbol{F}^{-1}\{f^*(t)\} = F^*(\omega) \qquad f^*(-t) = \boldsymbol{F}^{-1}\{F^*(\omega)\}$$

(8) 微分

$$\boldsymbol{F}\{\frac{df(t)}{dt}\} = j\omega F(\omega)$$

$$\boldsymbol{F}\{-jt\ f(t)\} = \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

(8) 畳込み

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$\boldsymbol{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega)$ $\boldsymbol{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega)$ のとき

$$\boldsymbol{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

$$\boldsymbol{F}\{f_1(t) f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

(9) パーシバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\ d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)^2 d\omega$$