

デジタル信号処理 (IX)

物理情報システム専攻
山口雅浩

E-mail: yamaguchi.m.aa@m.titech.ac.jp

Web: <http://www-oid.ip.titech.ac.jp>

1

8. 離散フーリエ変換

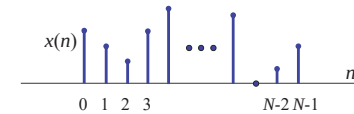
- 離散フーリエ変換(DFT)と連続フーリエ変換はどのような関係にあるか？
- 離散時間フーリエ変換との違いは何か？
- DFTで得られた周波数成分の意味を理解しよう。
- DFTは行列で表現できる
- 「循環推移」「循環畳み込み」とは？
- 連続時間信号を標本化してDFTを行った時に得られる結果の意味。

2

離散フーリエ変換

Discrete Fourier Transform: DFT

- 離散時間有限区間信号 $x(n)$: $0 \leq n < N$ に対して



DFT

$$X(k) = \text{DFT}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi nk/N}$$

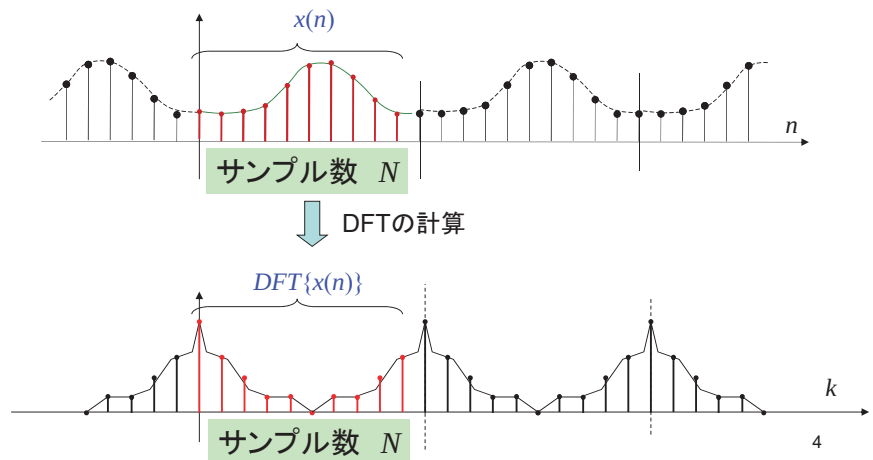
Inverse DFT

$$x(n) = \text{DFT}^{-1}\{X(k)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j2\pi nk/N}$$

3

DFTは、離散時間領域で周期関数を仮定している
→ 周波数領域で離散的・周期的となる

周期はどちらも N



4

■ 離散フーリエ変換では、周波数領域が
離散化されている

Remind that ...

- 間隔 T のδ関数列のフーリエ変換: →
周期 $2\pi/T$ の周期関数
- 周期 T_p の周期関数のフーリエ変換: →
間隔 $2\pi/T_p$ のδ関数列

5

連続と離散のフーリエ変換

	時間領域	周波数領域
連続フーリエ変換	連続	連続
離散時間フーリエ変換	離散	連続 周期関数
離散フーリエ変換	離散 周期関数	離散 周期関数

6

$W_N = e^{-j2\pi/N}$ を用いて表現すると

DFT

$$X(k) = \text{DFT}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk}$$

Inverse DFT

$$x(n) = \text{DFT}^{-1}\{X(k)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j2\pi nk/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-nk}$$

※ N点DFT

7

$k = 0 \dots 15$ 全ての W_N^{-nk} を見てみよう

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-nk}$$

$x(n)$ は W_N^{-nk} に $(1/N)X(k)$
の重みを付けて足し合わせたもの。

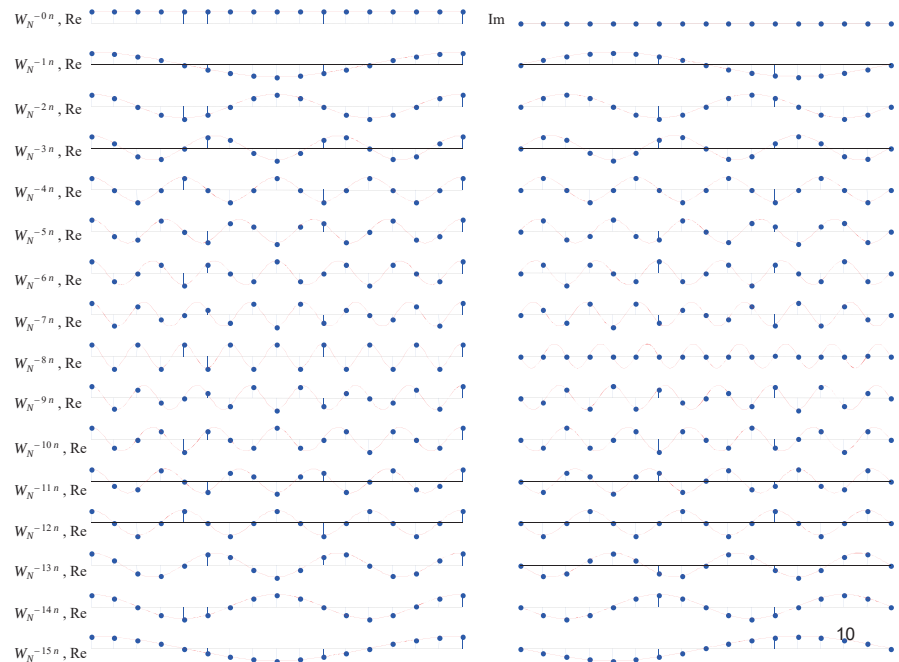
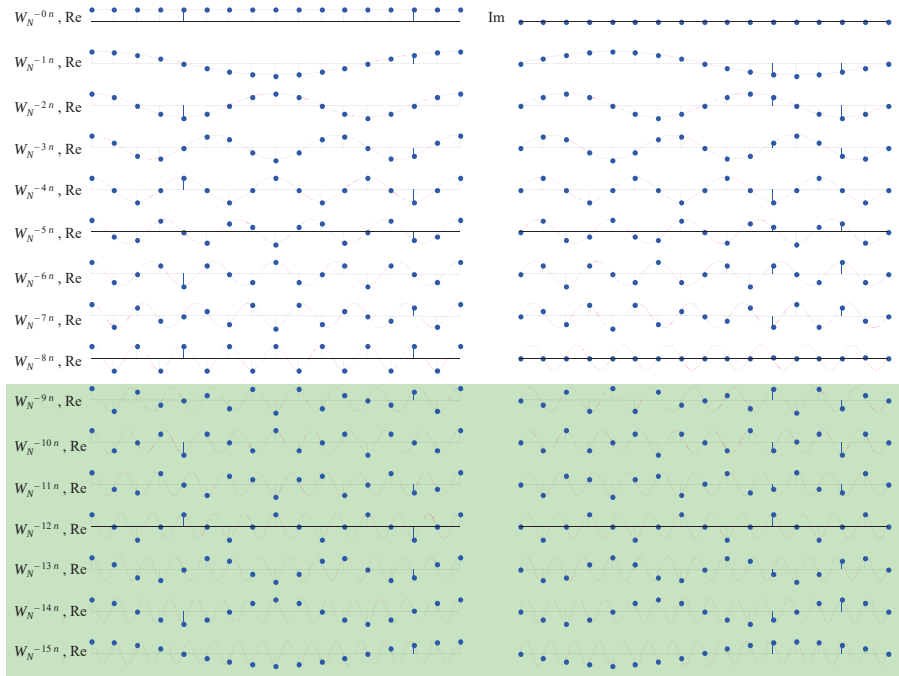
$(1/N)X(k)$ は、 $x(n)$ に W_N^{-nk} の
成分がどれだけ含まれているか、
を表している。

```
x = [0:16];
lx = [0:160];
x10 = [0:10:160];

for n = 0:15
    fc = cos(2*pi*x*n/16);
    fs = sin(2*pi*x*n/16);
    lc = cos(2*pi*lx*n/160);
    ls = sin(2*pi*lx*n/160);
    subplot(16,2,2*n+1);
    stem(x10,fc,'');
    hold on;
    plot(lx,lc,'r');
    hold off;
    axis off;
    axis([0 160 -1 1]);
    subplot(16,2,2*n+2);
    stem(x10,fs,'');
    hold on;
    plot(lx,ls,'r');
    hold off;
    axis off;
    axis([0 160 -1 1]);
end
```

「基底関数」、「基底ベクトル」とも呼ばれる。

8



$N = 16$ のときの最高周波数は $k = 8$

- cf. サンプリング定理

$W_N^{-nk} = W_N^{-(n-N)k}$ が成り立つことから、
 $k > N/2$ であっても、 $|k-N| < N/2$
 $N/2$ 未満の負の周波数を表している。

→ $N = 16$ のとき、 $k > 8$ の周波数は
 $k-16$ の周波数に等しいので、 k が16に
 近づくにつれて低い周波数を表すことになる。

```
x = [0:16];
lx = [0:160];
x10 = [0:10:160];
for n = 0:15
    fc = cos( 2*pi*x*nn/16 );
    fs = sin( 2*pi*x*nn/16 );
    if n > 8
        nn = n-16;
    else
        nn = n;
    end
    lc = cos( 2*pi*lx*nn/160 );
    ls = sin( 2*pi*lx*nn/160 );
    subplot(16, 2, 2*n+1);
    stem(x10, fc, 'r');
    hold on;
    plot(lx, lc, 'r');
    hold off;
    axis off;
    axis( [0 160 -1 1] );
    subplot(16, 2, 2*n+2);
    stem(x10, fs, 'r');
    hold on;
    plot(lx, ls, 'r');
    hold off;
    axis off;
    axis( [0 160 -1 1] );
end
```

11

W_N の実部はcos, 虚部はsin

- 離散時間信号が実数値のとき、
 cosの成分(偶関数成分) ⇔ フーリエ係数の実部
 sinの成分(奇関数成分) ⇔ フーリエ係数の虚部

- 離散時間信号が虚数成分も持つ場合、
 虚数部におけるcosの成分(偶関数成分)
 ⇔ フーリエ係数の虚部
 虚数部におけるsinの成分(奇関数成分)
 ⇔ フーリエ係数の実部

回転子 W_N の性質

巡回性 (p は任意の整数)

$$W_N^k = W_N^{k+pN}$$

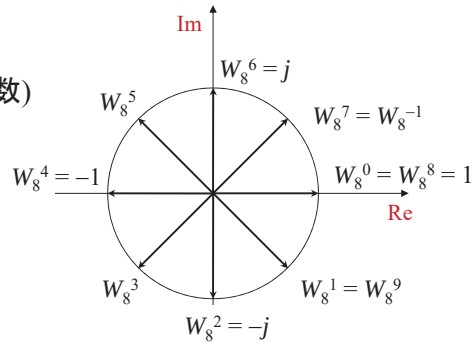
複素共役

$$(W_N^k)^* = W_N^{-k} = W_N^{N-k}$$

直交性

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} = \begin{cases} N & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{nk} W_N^{n'k} = \begin{cases} N & n=n' \\ 0 & n \neq n' \end{cases}$$



練習問題
これらの式を証明せよ

13

離散フーリエ変換・逆変換の行列表記

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^0 & e^0 & e^0 & e^0 \\ e^0 & e^{-j\frac{2\pi}{4}} & e^{-j\frac{4\pi}{4}} & e^{-j\frac{6\pi}{4}} \\ e^0 & e^{-j\frac{4\pi}{4}} & e^{-j\frac{8\pi}{4}} & e^{-j\frac{12\pi}{4}} \\ e^0 & e^{-j\frac{6\pi}{4}} & e^{-j\frac{12\pi}{4}} & e^{-j\frac{18\pi}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^0 & e^0 & e^0 & e^0 \\ e^0 & e^{j\frac{2\pi}{4}} & e^{j\frac{4\pi}{4}} & e^{j\frac{6\pi}{4}} \\ e^0 & e^{j\frac{4\pi}{4}} & e^{j\frac{8\pi}{4}} & e^{j\frac{12\pi}{4}} \\ e^0 & e^{j\frac{6\pi}{4}} & e^{j\frac{12\pi}{4}} & e^{j\frac{18\pi}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^{-1} & W_4^{-2} & W_4^{-3} \\ 1 & W_4^{-2} & W_4^{-4} & W_4^{-6} \\ 1 & W_4^{-3} & W_4^{-6} & W_4^{-9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{pmatrix}$$

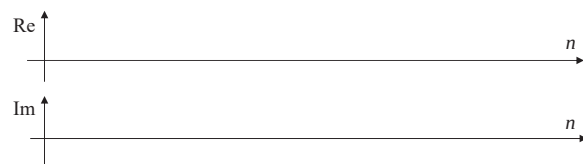
15

練習問題

• 逆DFT

$$x(n) = \text{DFT}^{-1}\{X(k)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-nk}$$

について、 $N=16$ のとき、 $k=6$ に対する W_N^{-nk} の概形を図に描いてみよ。($0 \leq n \leq 15$)

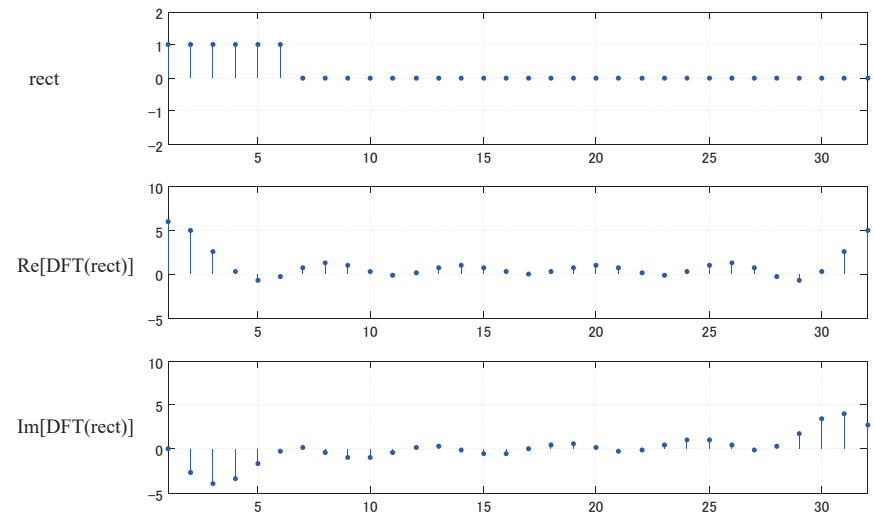


$X(k)$ は、 $x(n)$ にどれだけの W_N^{-nk} の成分が含まれるか、を表していると言える

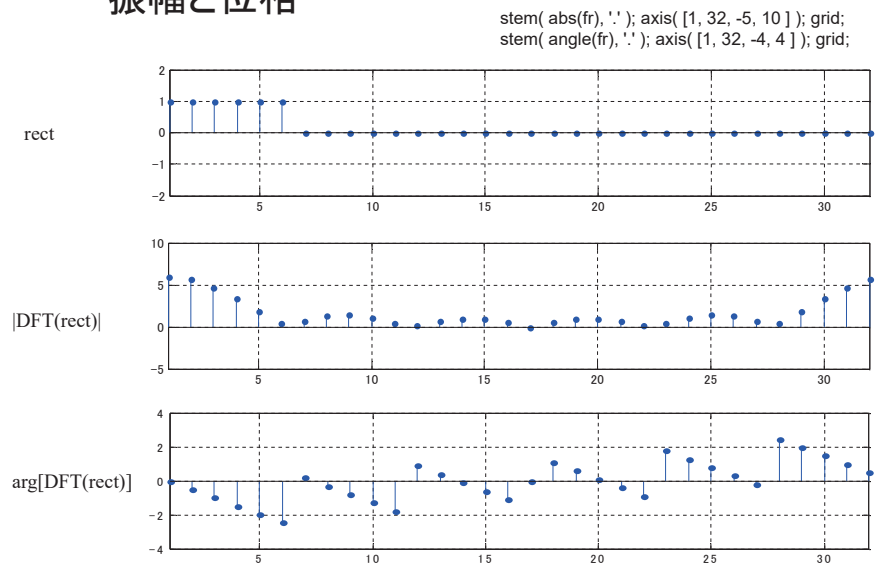
14

例: 矩形パルスのDFT

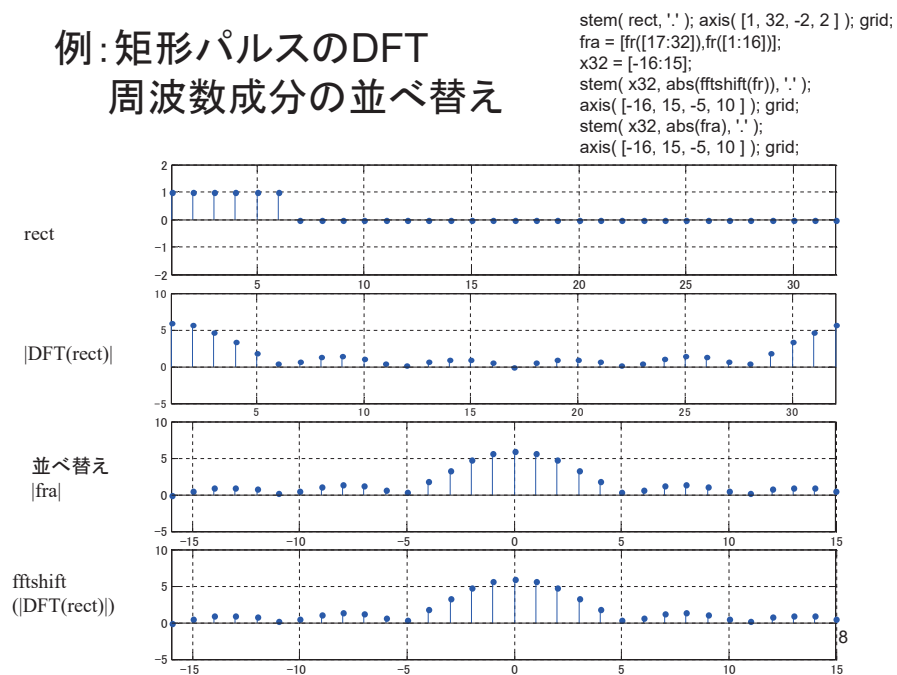
```
rect([1:32]) = 0;
rect([1:6]) = 1;
stem( rect, '.' ); axis( [1, 32, -2, 2] ); grid;
fr = fft(rect);
stem( real(fr), '.' ); axis( [1, 32, -5, 10] ); grid;
stem( imag(fr), '.' ); axis( [1, 32, -5, 10] ); grid;
```



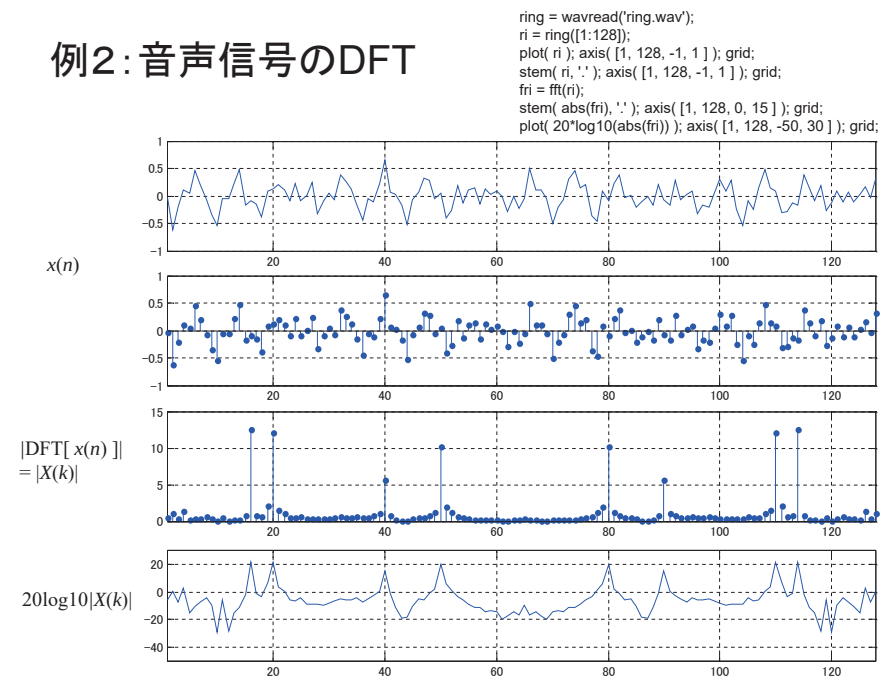
例: 矩形パルスのDFT 振幅と位相



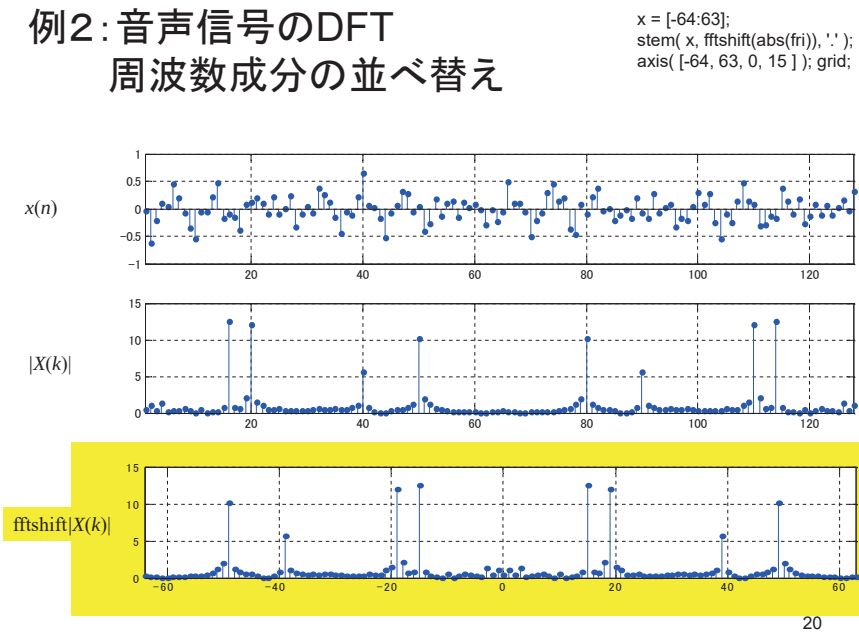
例: 矩形パルスのDFT 周波数成分の並べ替え



例2: 音声信号のDFT

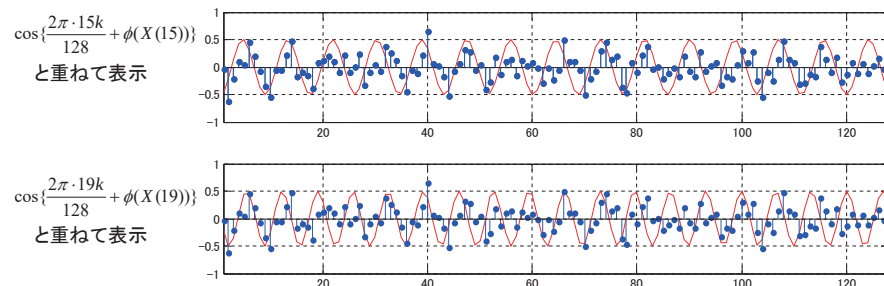


例2: 音声信号のDFT 周波数成分の並べ替え



例2: 音声信号のDFT 強い周波数成分

```
>> angle( fri(16) )
ans =
    2.7592
>> c16a = cos( 2 * pi * 15 / 128 * [1:128] + 2.7592 ) * 0.5;
>> plot(c16a, 'r' );
>> hold on;
>> stem( ri, '.' ); axis( [1, 128, -1, 1] ); grid;
>> hold off;
>> angle( fri(20) )
ans =
    1.1151
>> c20a = cos( 2 * pi * 19 / 128 * [1:128] + 1.1151 ) * 0.5;
>> plot(c20a, 'r' );
>> hold on;
>> stem( ri, '.' ); axis( [1, 128, -1, 1] ); grid;
```



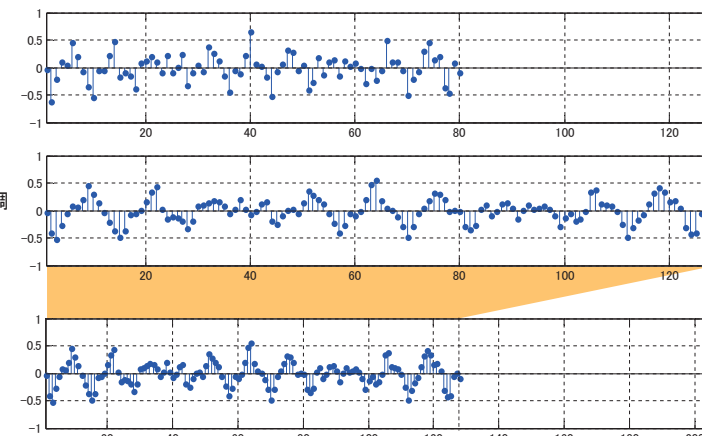
21

例2: 音声信号のDFT 標本化周期を調整

```
xi = [0:127] * 79 / 127 + 1;
ipr = interp1( ri80([1:80]), xi );
stem( ipr, '.' ); axis( [1, 128, -1, 1] ); grid;
axis( [1, 80, 0, 15] );
```

$x(n)$
 $n = 1 \dots 80$

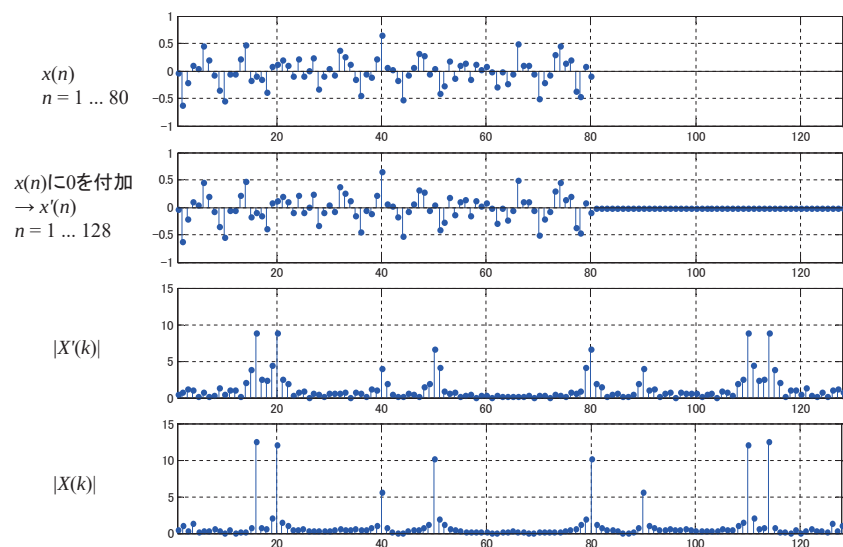
$x(n) \ n = 1 \dots 80$
の標本化間隔を調整してデータ長を128とした $x''(n)$



23

例2: 音声信号のDFT 短いデータに0を挿入

```
ri80 = ri([1:80]);
stem( ri80, '.' ); axis( [1, 128, -1, 1] ); grid;
ri80([81:128]) = 0;
stem( ri80, '.' ); axis( [1, 128, -1, 1] ); grid;
fri80 = fft(ri80);
stem( abs(fri80), '.' ); axis( [1, 128, 0, 15] ); grid;
```



例2: 音声信号のDFT 標本化周期を調整

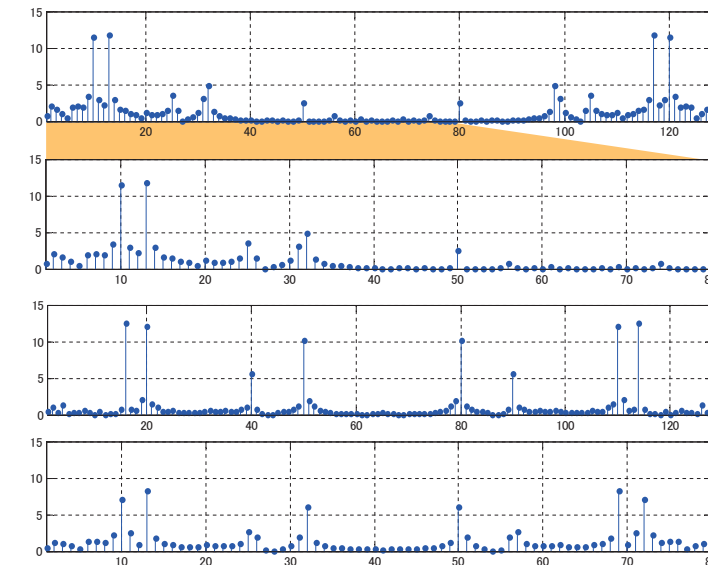
```
fipr = fft( ipr );
stem( abs(fipr), '.' ); axis( [1, 128, 0, 15] ); grid;
axis( [1, 80, 0, 15] );
fri80 = fft(ri80([1:80]));
stem( abs(fri80), '.' ); axis( [1, 80, 0, 15] ); grid;
```

128点DFT
 $| \text{DFT} \{ x''(n) \} |$
 $= | X''(k) |$
 $k = 1 \dots 128$

$| X''(k) |$
 $k = 1 \dots 80$

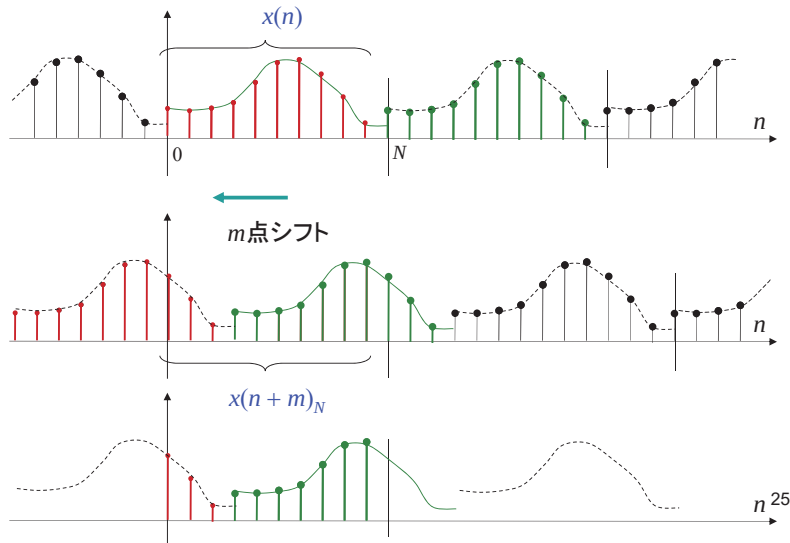
$| X(k) |$

80点DFT
 $| \text{DFT} \{ x(n) \} |$
 $k = 1 \dots 80$

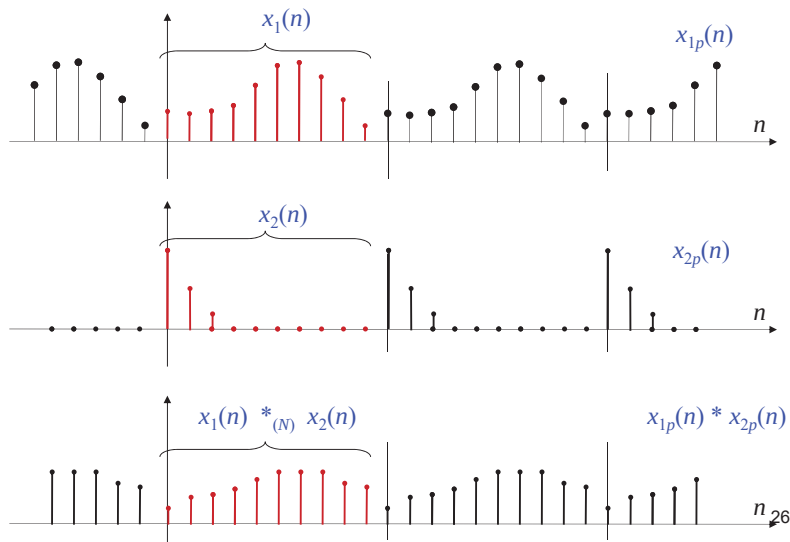


循環推移

循環推移定理 $\text{DFT}\{x(n+m)_N\} = W_N^{-km} \text{DFT}\{x(n)\}$



循環畳込み



循環畳込み定理

- 系列長 N の信号 $x_1(n)$ と $x_2(n)$ の循環畳込みを以下の式で定義する

$$y(n) = x_1(n) *_{(N)} x_2(n) = \left\{ \sum_{l=0}^{N-1} x_{1p}(l) x_{2p}(n-l) \right\} P_N(n)$$

ただし

$$P_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- このとき

$$\text{DFT}\{y(n)\} = \text{DFT}\{x_1(n) *_{(N)} x_2(n)\} = \text{DFT}\{x_1(n)\} \cdot \text{DFT}\{x_2(n)\}$$

→ 2つの離散信号の循環畳込みのDFTは、それぞれのDFTの積に一致する

27

循環畳込み定理(周波数領域)

- 系列長 N の信号 $x_1(n)$ と $x_2(n)$ の積のDFTは、

$$Y(k) = \text{DFT}\{x_1(n) \cdot x_2(n)\} = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} X_{1p}(m) X_{2p}(k-m) \right\} P_N(k)$$

ただし $X_{qp}(k)$ は $X_q(k)$ を周期 D で並べて周期関数としたもの ($q=1, 2$) であり、

$$X_q(k) = \text{DFT}\{x_q(n)\}$$

→ 2つの離散信号の積のDFTは、それぞれのDFTの循環畳込みに一致する

28

まとめ: 離散フーリエ変換と連続信号

- 連続時間領域でのサンプリング間隔 T
 - サンプル数 N
 - 連続系の周波数領域でのサンプリング間隔 ω_p
-
- 連続時間領域で周期 T_p の周期関数として扱われる
 - $T_p = N T$
 - $f(n) = f(nT)$
 $F(k) = F(k\omega_p)$
 - $\omega_p = 2\pi / T_p$
 - 周波数のサンプリング間隔 $f_p = 1/T_p = 1/(NT)$
 - 最高周波数 $N/2$ は
 $(N/2)(1/T_p) = 1/(2T)$ Hz cf. サンプリング定理

29

例: $N = 1000, T = 10$ ms のとき、

$$T_p = 10$$

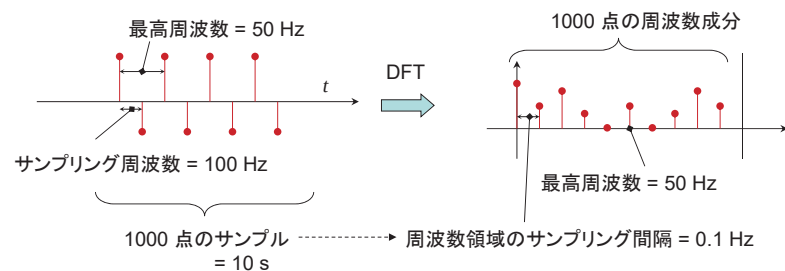
サンプリング周波数は $1/T = 100$ Hz

$$\omega_p = 2\pi / 10 \text{ rad/s}$$

$F(k)$ は、角周波数 $0.2\pi k$ [rad/s] の成分を表す、

周波数 $0.1 k$ [Hz] の成分を表す

最高周波数 $k = N/2$ は 50 Hz



30