

デジタル電子回路

第6回

クワイン・マクスキーの方法

カルノー図は、ひどく図形認識の感覚に頼っている！
見落としが起ることがある！

カルノー図は、最大6入力まで。実用的には4入力



もっと機械的に、コンピュータでも出来る方法を見つけよう。
要は変数が一つだけ異なるものを探して、まとめて行けば良い！



クワイン・マクスキー法

クワイン・マクスキーの方法

<準備> 1ビットだけ異なる2つの2進数の性質

下位から i 番目のビットの値だけが異なる2進数 $(A)_2 (B)_2$

2つの数を構成する“1”の数の差: 1 ... (1)

10進数に直して両者の差をとると... 2^{i-1} となる。 ... (2)

<例> $(A)_2=(1001)_2$ $(B)_2=(1101)_2$ 下位から3ビット目が違う

“1”の数: Aは2個、Bは3個で差は1個

$(A)_{10}=9$, $(B)_{10}=13$ その差は $4=2^{(3-1)}$

最小項を構成している各変数を一定の順序(ABC順)でならべ、
各変数が肯定の場合は1を、否定(補元)の場合は0を割り当てる。

上記の(1)、(2)を満たせば、それらの最小項は隣接している。

<例> $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D$ は $(1001)_2$ に、 $A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D$ は $(1101)_2$ に対応する。

1ビットだけ異なる2進数を探して、隣接する項を見つける。

クワイン・マクスキーの方法

1ビットだけ異なる2つの2進数の性質

2つの数を構成する“1”の数の差: 1 ... (1)

10進数に直して両者の差をとると... 2^{i-1} となる。 ... (2)

10進数の差が1の時は注意！

<例> $(A)_2=(0011)_2$ $(B)_2=(0100)_2$ 1ビット以上(3ビット)違う。

“1”の数: Aは2個、Bは1個で差は1個

$(A)_{10}=3$, $(B)_{10}=4$ その差は $1=2^0$

要は1ビットだけ異なる2進数を見つけたい。

クワイン・マクスキー法による簡単化

1ビットだけ異なる2進数を探して、隣接する項を見つけ、簡単化する。

まずABCが 01- などだと判りにくいので、ビット数で書く
すなわち3ビットなので、32- のようにしよう。

$$f = A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot D \\ + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{D}$$

は、 $f = \{4321, 4321, 4321, 4321, 4321, 4321, 4321, 4321\}$
と書ける。

クワイン・マクスキー法による簡単化

$$f = \{4321, 4321, 4321, 4321, 4321, 4321, 4321, 4321\}$$

1の数で仕分ける

1の数=0

無し

1の数=1

4321

4321

4321

1の数=2

4321

4321

4321

4321

4321

1の数=3

4321

1の数=4

4321

クワイン・マクラスキー法による簡単化

1の数が一つちがうものを探す 見つけたら横にチェックをつけ、その記号を書き出す

1の数=1	1の数=1
$\overline{4321} \vee (\overline{4321}, \overline{4321})$	$\overline{321}$
$\overline{432\bar{1}}$	$\overline{431}$
1の数=2	
$\overline{432\bar{1}}$	
$\overline{4321} \vee$	
$\overline{4321} \vee$	
$\overline{432\bar{1}}$	
1の数=3	
$\overline{4321}$	
1の数=4	
$\overline{4321}$	

クワイン・マクラスキー法による簡単化

1の数が一つちがうものを探す 見つけたら横にチェックをつけ、その記号を書き出す

1の数=1	1の数=1
$\overline{4321} \vee (\overline{4321}, \overline{4321})$	$\overline{321}$
$\overline{432\bar{1}} \vee (\overline{4321}, \overline{432\bar{1}})$	$\overline{431}$
1の数=2	$\overline{432}$
$\overline{432\bar{1}}$	$\overline{42\bar{1}}$
$\overline{4321} \vee$	
$\overline{4321} \vee$	
$\overline{432\bar{1}} \vee$	
1の数=3	
$\overline{4321}$	
1の数=4	
$\overline{4321}$	

クワイン・マクラスキー法による簡単化

1の数が一つちがうものを探す 見つけたら横にチェックをつけ、その記号を書き出す

1の数=1	1の数=1
$\overline{4321} \vee (\overline{4321}, \overline{4321})$	$\overline{321}$
$\overline{432\bar{1}} \vee (\overline{4321}, \overline{432\bar{1}})$	$\overline{431}$
1の数=2	$\overline{432}$
$\overline{432\bar{1}}$	$\overline{42\bar{1}}$
$\overline{4321} \vee$	1の数=2
$\overline{4321} \vee (\overline{4321})$	$\overline{421}$
$\overline{432\bar{1}} \vee (\overline{4321})$	$\overline{432}$
1の数=3	
$\overline{4321} \vee$	
1の数=4	
$\overline{4321}$	

クワイン・マクラスキー法による簡単化

1の数が一つちがうものを探す 見つけたら横にチェックをつけ、その記号を書き出す

1の数=1	1の数=1
$\overline{4321} \vee (\overline{4321}, \overline{4321})$	$\overline{321}$
$\overline{432\bar{1}} \vee (\overline{4321}, \overline{432\bar{1}})$	$\overline{431}$
1の数=2	$\overline{432}$
$\overline{432\bar{1}}$	$\overline{42\bar{1}}$
$\overline{4321} \vee$	1の数=2
$\overline{4321} \vee (\overline{4321})$	$\overline{421}$
$\overline{432\bar{1}} \vee (\overline{4321})$	$\overline{432}$
1の数=3	1の数=3
$\overline{4321} \vee (\overline{4321})$	$\overline{321}$
1の数=4	
$\overline{4321} \vee$	

クワイン・マクラスキー法による簡単化

一つ目が終わったら、チェックが付かなかったものを残し、もう一回行う。

1の数=2	1の数=1	1の数=1
$\overline{4321}$	$\overline{321}$	$\overline{42}$
	$\overline{431}$	$\overline{42}$
	$\overline{432} \vee (\overline{432})$	
	$\overline{42\bar{1}} \vee (\overline{421})$	
1の数=2		
	$\overline{421} \vee$	
	$\overline{432} \vee$	
1の数=3		
	$\overline{321}$	

クワイン・マクラスキー法による簡単化

もうないので、チェックが付いていないもの(主項)だけ書き出す。

1の数=2	1の数=1	1の数=1
$\overline{4321}$	$\overline{321}$	$\overline{42}$
	$\overline{431}$	$\overline{42}$
	$\overline{432} \vee (\overline{432})$	
	$\overline{42\bar{1}} \vee (\overline{421})$	
1の数=2		
	$\overline{421} \vee$	
	$\overline{432} \vee$	
1の数=3		
	$\overline{321}$	

$\overline{4321}$
 $\overline{321}$
 $\overline{431}$
 $\overline{321}$
 $\overline{42}$

クワイン・マクスキー法による簡単化

選択表を作る。表の上側にはすべての最小項を書く。左に各主項を書く。各主項が表すことのできる最小項の欄に $\checkmark$ を付ける。

	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$
$\overline{4}3\overline{2}1$	$\checkmark$							
$\overline{3}21$		$\checkmark$	$\checkmark$					
$\overline{4}31$		$\checkmark$		$\checkmark$				
$\overline{3}21$					$\checkmark$	$\checkmark$		
$\overline{4}2$				$\checkmark$	$\checkmark$		$\checkmark$	$\checkmark$

クワイン・マクスキー法による簡単化

選択表を作る。

	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$
$\overline{4}3\overline{2}1$	$\bigcirc$							
$\overline{3}21$		$\checkmark$	$\bigcirc$					
$\overline{4}31$		$\checkmark$		$\checkmark$				
$\overline{3}21$					$\checkmark$	$\bigcirc$		
$\overline{4}2$				$\checkmark$	$\checkmark$		$\bigcirc$	$\bigcirc$

縦に1カ所だけの主項は $\bigcirc$ で囲む

クワイン・マクスキー法による簡単化

選択表を作る。

	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$
$\overline{4}3\overline{2}1$	$\bigcirc$							
$\overline{3}21$		$\bigcirc$	$\bigcirc$					
$\overline{4}31$		$\checkmark$		$\checkmark$				
$\overline{3}21$					$\bigcirc$	$\bigcirc$		
$\overline{4}2$				$\bigcirc$	$\bigcirc$		$\bigcirc$	$\bigcirc$

縦に1カ所だけの主項は $\bigcirc$ で囲む

その主項の $\checkmark$ も $\bigcirc$ で囲む

全ての最小項の下に $\bigcirc$ が有れば終わり $\overline{4}3\overline{2}1, \overline{3}21, \overline{3}21, \overline{4}2$

なければ、文字数が少なくなるように、主項を選ぶ

これを記号に戻すと

$$f = A \cdot B \cdot C \cdot D + B \cdot C \cdot D + B \cdot C \cdot D + A \cdot C$$

カルノー図で確認

$\overline{4}3\overline{2}1$ $\overline{4}3\overline{2}1$ $\overline{4}3\overline{2}1$ $\overline{4}3\overline{2}1$ $\overline{4}3\overline{2}1$ $\overline{4}3\overline{2}1$ $\overline{4}3\overline{2}1$ $\overline{4}3\overline{2}1$ だから

AB \ CD	00	01	11	10
00			1	
01	1			1
11	1	1	1	
10	1	1		

$$f = A \cdot B \cdot C \cdot D + B \cdot C \cdot D + B \cdot C \cdot D + A \cdot C$$

クワイン・マクスキー法による簡単化

ちなみにこんな選択表だと

	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$	$\overline{4}3\overline{2}1$
$\overline{4}31$		$\checkmark$			
$\overline{4}21$	$\checkmark$				
$\overline{4}21$		$\checkmark$	$\checkmark$		
$\overline{4}31$	$\checkmark$				$\checkmark$
$\overline{4}32$				$\checkmark$	$\checkmark$
$\overline{3}21$			$\checkmark$	$\checkmark$	

1カ所も $\bigcirc$ がつけられない……
ただし $\overline{4}3\overline{2}1$ を実現するには、
 $\overline{4}21$ か $\overline{4}31$ のどちらかが必要
書くのが面倒なので、
横の様にギリシャ文字を当てると

$$(\beta + \delta)(\alpha + \gamma)(\gamma + \zeta)(\varepsilon + \zeta)(\delta + \varepsilon)$$

$$= (\alpha\zeta + \gamma)(\varepsilon + \zeta)(\delta + \beta\varepsilon) = (\alpha\zeta + \gamma)(\delta\varepsilon + \beta\varepsilon + \zeta\delta)$$

$$= \alpha\zeta\delta\varepsilon + \alpha\zeta\beta\varepsilon + \alpha\zeta\delta + \gamma\delta\varepsilon + \gamma\beta\varepsilon + \gamma\zeta\delta$$

$$= \alpha\zeta\beta\varepsilon + \alpha\zeta\delta + \gamma\delta\varepsilon + \gamma\beta\varepsilon + \gamma\zeta\delta$$

右の四つはどれか
成立すればよい

ドントケアが有る場合

次にドントケアが有る場合を考えよう

ここで0から4までの数が偶数かどうかを判定する回路を考えよう。
変数は5コなので、3ビット必要である。

偶数の0,2,4 は $\overline{3}21$ $\overline{3}21$ $\overline{3}21$ が出力である。
でも、ドントケアは5より上なので、 $\overline{3}21$ $\overline{3}21$ $\overline{3}21$ の三つある。

合わせて $\overline{3}21$ $\overline{3}21$ $\overline{3}21$ $\overline{3}21$ $\overline{3}21$ $\overline{3}21$ の六つで
クワインマクスキー法を行う

ドントケアが有る場合	
$f=\{\overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321}\}$	
1の数=0	$\overline{321}$
1の数=1	$\overline{321}$
	$\overline{321}$
1の数=2	$\overline{321}$
	$\overline{321}$
1の数=3	$\overline{321}$

ドントケアが有る場合	
$f=\{\overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321}\}$	
1の数=0	1の数=0
$\overline{321} \checkmark$	
1の数=1	$\overline{31}$
$\overline{321} \checkmark$	$\overline{21}$
$\overline{321} \checkmark$	
1の数=2	
$\overline{321}$	
$\overline{321}$	
1の数=3	
$\overline{321}$	

ドントケアが有る場合	
$f=\{\overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321}\}$	
1の数=0	1の数=0
$\overline{321} \checkmark$	$\overline{31}$
1の数=1	$\overline{21}$
$\overline{321} \checkmark$	
$\overline{321} \checkmark$	1の数=1
1の数=2	$\overline{21}$
$\overline{321} \checkmark$	$\overline{32}$
$\overline{321} \checkmark$	$\overline{31}$
1の数=3	
$\overline{321}$	

ドントケアが有る場合	
$f=\{\overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321}\}$	
1の数=0	1の数=0
$\overline{321} \checkmark$	$\overline{31}$
1の数=1	$\overline{21}$
$\overline{321} \checkmark$	
$\overline{321} \checkmark$	1の数=1
1の数=2	$\overline{21}$
$\overline{321} \checkmark$	$\overline{32}$
$\overline{321} \checkmark$	$\overline{31}$
1の数=3	1の数=2
$\overline{321} \checkmark$	$\overline{31}$
	$\overline{32}$

ドントケアが有る場合		
$f=\{\overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321}\}$		
1の数=0	1の数=0	1の数=0
$\overline{321} \checkmark$	$\overline{31} \checkmark$	$\overline{1}$
1の数=1	$\overline{21} \checkmark$	
$\overline{321} \checkmark$	1の数=1	
$\overline{321} \checkmark$	$\overline{21} \checkmark$	
1の数=2	$\overline{32}$	
$\overline{321} \checkmark$	$\overline{31} \checkmark$	
$\overline{321} \checkmark$	1の数=2	
1の数=3	$\overline{31}$	
$\overline{321} \checkmark$	$\overline{32}$	

ドントケアが有る場合		
$f=\{\overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321} \ \overline{321}\}$		
1の数=0	1の数=0	1の数=0
$\overline{321} \checkmark$	$\overline{31} \checkmark$	$\overline{1}$
1の数=1	$\overline{21} \checkmark$	1の数=1
$\overline{321} \checkmark$		$\overline{3}$
$\overline{321} \checkmark$	1の数=1	
1の数=2	$\overline{21} \checkmark$	
$\overline{321} \checkmark$	$\overline{32} \checkmark$	
$\overline{321} \checkmark$	$\overline{31} \checkmark$	
1の数=3	1の数=2	
$\overline{321} \checkmark$	$\overline{31} \checkmark$	
	$\overline{32} \checkmark$	

ドントケアが有る場合

$$f = \{3\bar{2}\bar{1} \ 3\bar{2}\bar{1} \ 3\bar{2}\bar{1} \ 3\bar{2}\bar{1} \ 3\bar{2}\bar{1} \ 3\bar{2}\bar{1}\}$$

1の数=0 $\bar{3}\bar{2}\bar{1} \checkmark$	1の数=0 $\bar{3}\bar{1} \checkmark$	1の数=0 $\bar{1}$
1の数=1 $\bar{3}\bar{2}\bar{1} \checkmark$	$\bar{2}\bar{1} \checkmark$	1の数=1 $\bar{3}$
$\bar{3}\bar{2}\bar{1} \checkmark$	1の数=1 $\bar{2}\bar{1} \checkmark$	
1の数=2 $\bar{3}\bar{2}\bar{1} \checkmark$	$\bar{3}\bar{2} \checkmark$	主項は $3, \bar{1}$
$\bar{3}\bar{2}\bar{1} \checkmark$	$\bar{3}\bar{1} \checkmark$	
1の数=3 $\bar{3}\bar{2}\bar{1} \checkmark$	1の数=2 $\bar{3}\bar{1} \checkmark$	
	$\bar{3}\bar{1} \checkmark$	
	$\bar{3}\bar{2} \checkmark$	

ドントケアが有る場合

選択表を作る。上の最小項にはドントケアは含まない

	$\bar{3}\bar{2}\bar{1}$	$\bar{3}\bar{2}\bar{1}$	$\bar{3}\bar{2}\bar{1}$
3			$\checkmark$
$\bar{1}$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$

必要な主項は $\bar{1}$ だけ

クワインマクスキー法は面倒……だけど、間違えなければ直感が要らない方法

NANDの回路を簡単化しよう

第3回に示したように、積和形はNANDのみの回路に出来る

したがって、積和形の簡単化はカルノーマップなどで行える。

ところが、NANDのみで起こる簡単化がある。

まず積和形は以下の形に書ける

$$f = H_1 \cdot \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2 \cdot \bar{T}_3 \dots + H_2 \cdot \bar{T}_4 \cdot \bar{T}_5 \cdot \bar{T}_6 \dots + \dots$$

ここで H_i は肯定型変数からなるAND項でヘッドと呼ぶ

$\bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2 \cdot \bar{T}_3 \dots$ は否定型変数からなる項でテイルと呼ぶ

$$\begin{aligned} f &= H_1 \cdot \bar{T}_1 + H_1 \cdot \bar{T}_2 \\ &= H_1 \cdot (\bar{T}_1 + \bar{T}_2) = H_1 \cdot \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2 \end{aligned}$$

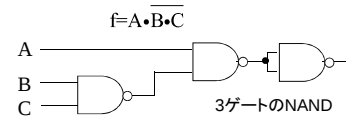
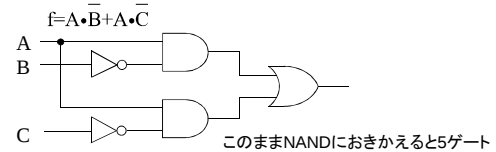
なので、ヘッドの同じ項はまとめられる。

NANDの回路を簡単化しよう

$$f = H_1 \cdot \bar{T}_1 + H_1 \cdot \bar{T}_2$$

$$= H_1 \cdot (\bar{T}_1 + \bar{T}_2) = H_1 \cdot \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2$$

はあまり簡単になったように見えないので、回路で示そう。



NANDの回路を簡単化しよう

テイルが共通化するとまとめられる。
そこで、故意にテイル項を無理やりつくる。

$$H_1 \cdot \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2 = H_1 \cdot \bar{T}_1 \cdot h \bar{T}_2$$

というふうにヘッド項に含まれる変数hをテイル項に含ませて作る。上の式は

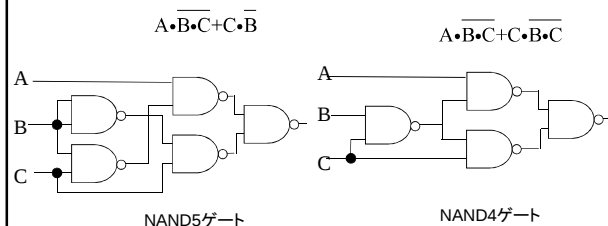
$$\begin{aligned} A \cdot \bar{B} &= A \cdot \bar{A} + A \cdot \bar{B} \\ &= A \cdot (\bar{A} + \bar{B}) = A \cdot (\overline{A \cdot B}) \end{aligned} \quad \text{で理解できる。}$$

NANDの回路を簡単化しよう

例えば

$$A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + C \cdot \bar{B} = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + C \cdot \bar{B} \cdot C$$

は、一見複雑化しているように見える。
でも回路を作ると



NORの回路を簡単化しよう

和積形はNORのみの回路に出来る

ただし、NANDの簡単化のテクニックをそのまま使えるかというと書き換えなければならない。

0に注目して、そこを1に置き換える
積和形の簡単化を行う。

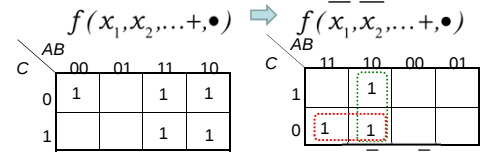
それから、全て補元を取る。
(双対関数)

+を・に、・を+に置き換える。
(したがってこの前の置換前にNANDのテクニックをつかうとNORIになる)

最終の答えはドモルガンの定理を使うと

NORの回路を簡単化しよう

ヘッド・テールを纏めるのをそのまま行いたい場合は双対関数をつかう。

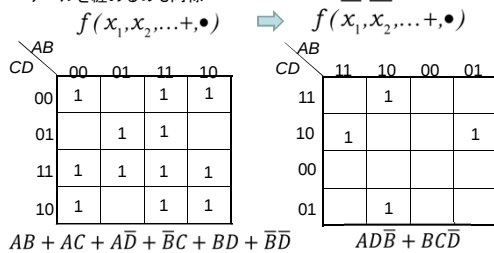


ヘッドをまとめる

ここで+を・に、・を+に置き換えるとNOR用になる。

NORの回路を簡単化しよう

テールを纏めるのも同様



$AB + AC + AD + BC + BD + BD$

$AD\bar{B} + BC\bar{D}$

テールをまとめる $AD\bar{B} + BC\bar{D} = AD\bar{B}\bar{D} + BC\bar{B}\bar{D}$

ここで+を・に、・を+に置き換えるとNOR用になる。

$(A + D + \bar{B} + \bar{D})(B + C + \bar{B} + \bar{D})$

NORの回路を簡単化しよう

和積形はNORのみの回路に出来る

テクニックを書き換えて、和積形の簡単化をしてから行う方法
先週話したように、0に注目して、そこを1に置き換えて、積和形の簡単化を行ってそれから、全て補元を取り、+を・に、・を+に置き換えてから、NANDの簡単化に相当する走査を行う。

ヘッドを纏めるのに相当する操作は

$$(A + B)(A + D) = A + A\bar{D} + AB + \bar{B}\bar{D} = A + B + D$$

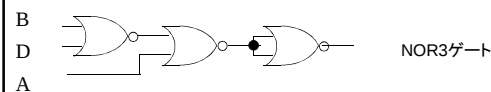
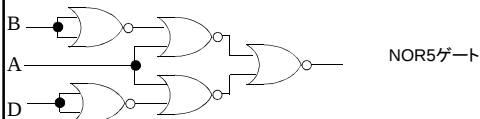
テールを纏めるのに相当する操作は

$$(A + D + \bar{B})(C + B + \bar{D}) = (A + D + \bar{D}\bar{B})(C + B + \bar{B}\bar{D}) = (A + D + \bar{B} + \bar{D})(C + B + \bar{B} + \bar{D})$$

NORの回路を簡単化しよう

ヘッドを纏めるのに相当する操作は

$$(A + \bar{B})(A + \bar{D}) = A + A\bar{D} + A\bar{B} + \bar{B}\bar{D} = A + \bar{B} + \bar{D}$$



NORの回路を簡単化しよう

テールを纏めるのに相当する操作は

$$(A + D + \bar{B})(C + B + \bar{D}) = (A + D + \bar{D}\bar{B})(C + B + \bar{B}\bar{D}) = (A + D + \bar{B} + \bar{D})(C + B + \bar{B} + \bar{D})$$

