2015年後期
応用確率統計

⑪ 仮説検定

河野 行雄

kawano@pe.titech.ac.jp

2016年1月7日

復習

■ 尤度関数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta)$$

■ 最尤推定量

$$\hat{\theta}^* = \arg\max_{\theta} L(\theta) = \arg\max_{\theta} \log L(\theta)$$

⟵　漸近不偏、漸近有効（クラメールラオの下界を達成）

■ クラメール・ラオの不等式

$$V\left(\hat{\theta} \mid \theta_0\right) \geq \frac{1}{nI}$$

$$I = E\left(\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f\left(X, \theta_0\right)\right)^2\right) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log f\left(X, \theta_0\right)\right)$$

統計的検定とは？

■ 統計的推測

母数推定（標本平均、最尤推定）

仮説検定、信頼区間、回帰曲線

■ 仮説検定

観測されたデータと想定する仮定が一致するかどうかを確認する方法

■ 例

A県で生産されたリンゴの糖度: $X_1, \cdots, X_n$

B県で生産されたリンゴの糖度: $Y_1, \cdots, Y_m$

$\Downarrow$

標本平均 $\overline{X}, \overline{Y}$ を比べることで平均の糖度が等しいといえるか？

仮説検定の枠組み

■ 観測データ

$$X_i = \theta_1 + \varepsilon_{Xi} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

$$Y_j = \theta_2 + \varepsilon_{Yj} \quad (j = 1, \cdots, m)$$

$\varepsilon_{Xi}, \varepsilon_{Yi}$ は i.i.d. で平均 0 分散 σ^2 の正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う

■ 仮説

仮説 H_0 ： 「 $\theta_1 = \theta_2$ 」 （帰無仮説、統計的仮説）

仮説 H_1 ： 「 $\theta_1 \neq \theta_2$ 」 （対立仮説）

⇩

有限の標本数 n, m で判定する枠組み → 仮説検定

検定統計量

- 母平均の推定量

$$\hat{\theta}_1 = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \hat{\theta}_2 = \overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_j$$

- 検定統計量

仮説 H_0 が真 $\rightarrow$ $\overline{Y} - \overline{X}$ は $N\left(0, \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\sigma^2\right)$ に従う

検定統計量: $$T \equiv \frac{\overline{Y} - \overline{X}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\,\sigma} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}}\,\frac{\overline{Y} - \overline{X}}{\sigma}$$

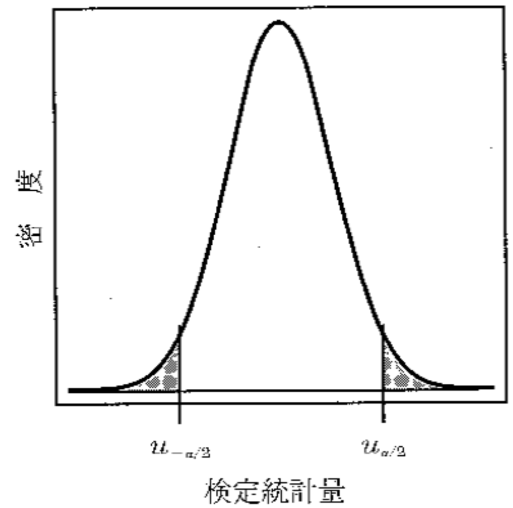
$$\Downarrow$$

検定統計量は平均 0 分散 1 の正規分布 $N(0,1)$ に従う

仮説の受容と棄却

■ 有意水準

判定誤り(過誤)の確率を α とする判定域 μ



$$P\left(\left|T\right| \geq \mu\right) = \alpha$$

判定域(例:1.96)

有意水準(例:0.05)

■ 仮説の受容

$\left|T\right| < \mu$ ⟶ 仮説 H_0 を受容 「 $\theta_1 = \theta_2$ 」

■ 仮説の棄却

$\left|T\right| \geq \mu$ ⟶ 仮説 H_0 を棄却 「 $\theta_1 \neq \theta_2$ 」

(確率 α の過誤を含む)

例1

■ 抜き取り検査

ある工場で製造される機械の寿命は平均 θ_0 時間

抜き取られた n 個の機械の寿命は $X_1, \cdots, X_n$

仮説 H_0 ： 「機械の寿命は θ_0」 は正しいか？

■ 仮説検定

観測データ: $X_i = \theta_0 + \varepsilon_i \quad (i = 1, \cdots, n) \qquad \varepsilon \to N\left(0, \sigma^2\right)$

推定量: $\hat{\theta} = \bar{X}$

検定統計量: $T = \dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - \theta_0\right)}{\sigma}$

判定: $\left|T\right| < \mu = 1.96 \longrightarrow$ 仮説を受容 「 $\theta = \theta_0$ 」

$\left|T\right| \geq \mu = 1.96 \longrightarrow$ 仮説を棄却 「 $\theta \neq \theta_0$ 」

分散の検定

■ 観測データ

$$X_i = \theta_0 + \varepsilon_i \quad (i = 1, \cdots, n) \qquad \varepsilon \to N\left(0, \sigma^2\right)$$

■ 推定量

$$\hat{\theta} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$ （標本平均）

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \hat{\theta}\right)^2$$ （不偏分散）

■ 仮説

仮説 H_0 ： 「 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 」 （帰無仮説）

仮説 H_1 ： 「 $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ 」 （対立仮説）

カイ二乗分布

- n 個の標準正規分布に従う確率変数の二乗和

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \exp\left(-\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} z^{-1/2} e^{-z/2}$$

$$\varphi_Z(t) = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} \int_0^\infty z^{-1/2} e^{-(1/2 - jt)z} dz = \frac{1}{\sqrt{1-2jt}}$$

$$\varphi_Y(t) = \frac{1}{(1-2jt)^{n/2}}$$

$$p(y) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} z^{n/2-1} e^{-z/2}$$ ← 自由度 n のカイ二乗分布

ガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},\ \Gamma(1) = 1$$

例2

- ばらつきの年度比較

  昨年調べたリンゴの糖度のばらつきは σ_0^2

  今年売られているリンゴの糖度は $X_1, \cdots, X_n$

  仮説 H_0 ：　「糖度のばらつき σ^2 は昨年と同じ」　は正しいか？

- 仮説検定

  観測データ: $X_i = \theta_0 + \varepsilon_i \quad (i = 1, \cdots, n) \qquad \varepsilon \to N\left(0, \sigma^2\right)$

  推定量: $\hat{\theta} = \bar{X}$

  検定統計量: $T = \dfrac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \hat{\theta}\right)^2$

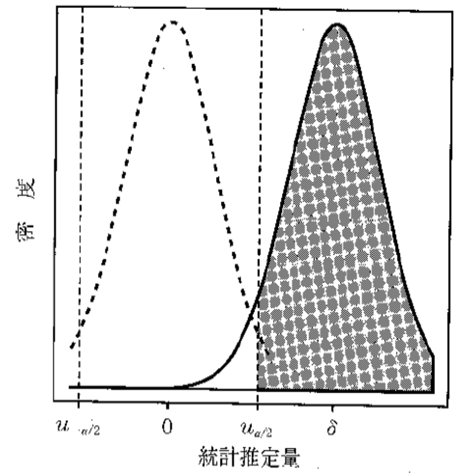
  自由度 *n* - 1 の
  カイ二乗分布

  有意水準: $\int_0^{\mu_1} P(T) dT = \dfrac{\alpha}{2} \qquad \int_{\mu_2}^{\infty} P(T) dT = \dfrac{\alpha}{2}$

  判定: $\mu_1 < T < \mu_2$ ⟶ 仮説を受容

  $T \le \mu_1$ または $T \ge \mu_2$ ⟶ 仮説を棄却

過誤と検出力



- 仮説

  帰無仮説 H_0 : 「 $\theta_1 = \theta_2$ 」

  対立仮説 H_1 : 「 $\theta_1 \neq \theta_2$ 」

- 過誤

  第1種の過誤: 帰無仮説が正しいのに対立仮説 → 有意水準 α

  第2種の過誤: 対立仮説が正しいのに帰無仮説 → 検出力 β

- 検出力

  検出力: 対立仮説が正しいときに帰無仮説を棄却する確率

  検定統計量: $T \equiv \sqrt{\dfrac{nm}{n+m}} \dfrac{\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1}{\sigma}$

  $\theta_1 \neq \theta_2$ のとき T は $N(\delta, 1)$ に従う

  検出力: $P(|T| \geq \mu \mid \delta)$ $\quad \delta = \sqrt{\dfrac{nm}{n+m}} \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{\sigma}$

ネイマン・ピアソンの補題

■ 観測データ

$X_1, \cdots, X_n$ は i.i.d. で確率密度関数 $f(X, \theta)$ に従う

■ 仮説

帰無仮説 H_0 : 「 $\theta = \theta_0$ 」

対立仮説 H_1 : 「 $\theta = \theta_1$ 」

■ 最適な検定統計量（ネイマン・ピアソンの補題）

検定統計量: $T \equiv \prod_{i=1}^{n} \frac{f(X_i, \theta_1)}{f(X_i, \theta_0)}$ ← 尤度比検定
検出力を最大化

有意水準: $P(T \geq \mu \mid \theta_0) = \alpha \longrightarrow T < \mu$ or $T \geq \mu$ で判定

まとめ

■ 仮説

帰無仮説 H_0 : 「 $\theta_1 = \theta_2$ 」 「 $\theta = \theta_0$ 」

対立仮説 H_1 : 「 $\theta_1 \neq \theta_2$ 」 「 $\theta = \theta_1$ 」

■ 検定統計量

$$T \equiv \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sigma}$$ ← 分散1の正規分布

■ 有意水準

$$P(|T| \geq \mu) = \alpha$$ ← 第一種の過誤

■ 仮説の受容と棄却

$|T| < \mu$ ⟶ 帰無仮説を受容 「 $\theta_1 = \theta_2$ 」

$|T| \geq \mu$ ⟶ 帰無仮説を棄却 「 $\theta_1 \neq \theta_2$ 」