

2015年後期 応用確率統計

⑩ 最尤推定量

河野 行雄

kawano@pe.titech.ac.jp

2015年12月24日

復習

- 誤差分布未知のときの最小分散推定量

$$\hat{\theta}^* = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- 誤差分布既知のときの最小分散位置共変推定量

$$\hat{\theta}^* = \frac{\int \theta \prod_{i=1}^n f(X_i - \theta) d\theta}{\int \prod_{i=1}^n f(X_i - \theta) d\theta}$$

- 不偏分散

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

推定量の分類

■ 観測データ

$$X_i = \theta + \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

誤差の分布: $f(\varepsilon_i)$ 平均: $E(\varepsilon_i) = 0$ 分散: $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$

■ 推定量の分類

最適(不偏・分散最小)な推定量

誤差の分布: $\begin{cases} \text{未知: } \hat{\theta}^* = \text{標本平均} \\ \text{既知: } \hat{\theta}^* = \text{ピットマン推定量} \end{cases}$

誤差の分布既知のときの一般的な推定量

最尤推定量 $\longrightarrow$ 漸近不偏、漸近有効(分散最小)

最尤推定量

■ 観測値の同時確率密度関数

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta)$$

■ 尤度関数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta)$$

確率変数 X_i の確率密度関数 $P(X_i | \theta)$ を θ の関数として $f(X_i, \theta)$ と表記

■ 最尤推定量

$$\begin{aligned}\hat{\theta}^* &= \arg \max_{\theta} L(\theta) = \arg \max_{\theta} \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta) \\ &= \arg \max_{\theta} \log L(\theta) = \arg \max_{\theta} \sum_{i=1}^n \log f(X_i, \theta)\end{aligned}$$

最尤推定の例

■ 問題

硬貨を100回投げて57回表が出たとき二項分布における a を求めよ

$$\text{二項分布: } f(m, a) = {}_n C_m a^m (1-a)^{n-m}$$

■ 最尤推定

$$L(a) = {}_{100} C_{57} a^{57} (1-a)^{43}$$

$$\log L(a) = \log \frac{100!}{57!43!} + 57 \log a + 43 \log(1-a)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \log L(a) = \frac{57}{a} - \frac{43}{1-a} = 0 \quad \longrightarrow \quad \hat{a} = \frac{57}{100}$$

フィッシャー情報量

■ フィッシャー情報量

最尤推定量 $\hat{\theta}^*$ と真の母数 θ_0 の関係を表す量

■ 最尤推定量の性質

最尤推定の性質

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\hat{\theta}^*) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X_i, \hat{\theta}^*) = 0$$

$\hat{\theta}^* = \theta_0$ でテイラー展開

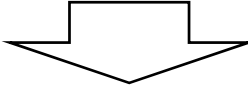
$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X_i, \theta_0) + (\hat{\theta}^* - \theta_0) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(X_i, \theta_0) + \dots = 0$$

フィッシャー情報量

$$I = \lim \left(-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(X_i, \theta_0) \right) = E \left(-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(X, \theta_0) \right)$$


フィッシャー情報量の変形

■ $\int f(x, \theta) dx = 1$ の変形

$$\begin{aligned} 0 &= \int \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = \int \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta)}{f(x, \theta)} f(x, \theta) dx \\ &= \int \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x, \theta) \right) f(x, \theta) dx = E \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X, \theta) \right) \\ 0 &= \int \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x, \theta) \right) f(x, \theta) dx + \int \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x, \theta) \right) \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx \\ &= \int \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x, \theta) \right) f(x, \theta) dx + \int \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x, \theta) \right)^2 f(x, \theta) dx \end{aligned}$$

$$I = E \left(\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X, \theta_0) \right)^2 \right) = -E \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(X, \theta_0) \right)$$

漸近有効性

■ 最尤推定量のテイラー展開

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}^* - \theta_0) \left(-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(X_i, \theta_0) \right) = \frac{\sqrt{n}}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X_i, \theta_0) + \dots$$

$$E\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X_i, \theta_0)\right) = 0 \quad V\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X_i, \theta_0)\right) = E\left(\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X_i, \theta_0)\right)^2\right) = I$$

$$\frac{\sqrt{n}}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X_i, \theta_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{平均 } 0 \text{ 分散 } I \text{ の正規分布}$$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}^* - \theta_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{平均 } 0 \text{ 分散 } \frac{I}{I^2} = \frac{1}{I} \text{ の正規分布}$$

■ 漸近有効性

漸近不偏

$$E(\hat{\theta}^* | \theta_0) = \theta_0 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

漸近有効

$$V(\hat{\theta}^* | \theta_0) = \frac{1}{nI} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

クラメール・ラオの不等式

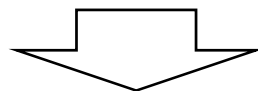
■ フィッシャー情報量

$$I = E \left(\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X, \theta_0) \right)^2 \right) = -E \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(X, \theta_0) \right)$$

■ 推定量の分散の下界

$$V(\hat{\theta} | \theta_0) \geq \frac{1}{nI}$$

← 不偏性の定義式とシュワルツの不等式から証明



最尤推定量は推定量の下界を漸近的に達成(漸近有効)

正規分布の尤度関数

■ 観測データ

$X_1, \dots, X_n$ は i.i.d. で平均 m 分散 σ^2 の正規分布

■ 尤度関数

$$f(X_i, m, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(X_i - m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\log f(X_i, m, \sigma^2) = -\frac{1}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (X_i - m)^2$$

$$\tilde{L}(m, \sigma^2) = \sum_{i=1}^n \log f(X_i, m, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$$

平均の最尤推定量

■ 母平均の推定

m : 未知母平均、 $\sigma^2 = 1$ のとき

$$\tilde{L}(m) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$$

■ 最尤推定

$$\frac{\partial}{\partial m} \tilde{L}(m) = \sum_{i=1}^n (X_i - m) = \sum_{i=1}^n X_i - nm = 0$$

$$\longrightarrow \hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} \quad \longleftarrow \text{標本平均に一致}$$

分散の最尤推定量

■ 母分散の推定

$m = 0$ 、 σ^2 : 未知母分散のとき

$$\tilde{L}(\sigma^2) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - n \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

■ 最尤推定

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \tilde{L}(\sigma^2) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_i^2 = 0$$

$$\longrightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad \longleftarrow \text{標本分散に一致(漸近不偏)}$$

まとめ

■ 尤度関数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta)$$

■ 最尤推定量

$$\hat{\theta}^* = \arg \max_{\theta} L(\theta) = \arg \max_{\theta} \log L(\theta)$$

← 漸近不偏、漸近有効 (クラメル・ラオの下界を達成)

■ クラメル・ラオの不等式

$$V(\hat{\theta} | \theta_0) \geq \frac{1}{nI}$$
$$I = E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X, \theta_0) \right)^2 \right] = -E \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(X, \theta_0) \right)$$