第7回

光ファイバのモード特性(偏波)

講義スケジュール（1）

	日付	内容
第１回	10/6	光通信システム(基礎・長距離基幹系)
第２回	10/13	光通信システム(メトロ・アクセス・LAN・インターコネクション)
第３回	10/20	光変調符号
第４回	10/27	光変復調技術(強度変調・位相変調)
第５回	11/10	光変復調技術(デジタル・コヒーレント関連技術）
第６回	11/17	光ファイバのモード特性(波動方程式)
第７回	11/24	光ファイバのモード特性(偏波)
第８回	12/1	ファイバの伝送特性(分散による伝送限界)

講義スケジュール（２）

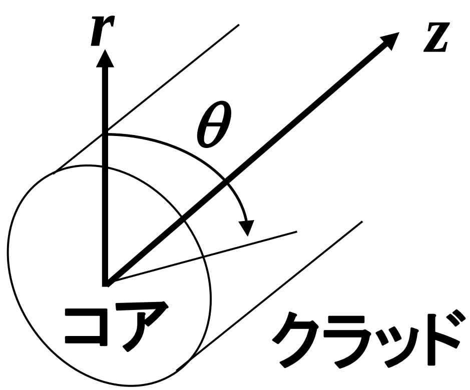
	日付	内容
第９回	12/8	ファイバの伝送特性(分散補償技術）
第１０回	12/15	光増幅器
第１１回	12/22	ビット誤り率（強度変調・直接検波）
第１２回	1/5	ビット誤り率（コヒーレント、多値変調、光増幅）
第１３回	1/19	波長多重（WDM）伝送(分散マネジメント技術)
第１４回	1/26	波長多重（WDM）伝送(変調技術)
第１５回	2/2	光スイッチング技術・最新の光通信関連技術

光ファイバのモード解析

光ファイバのモード(1)

光ファイバの波動方程式

界分布のz方向依存性をexp(-jβz)と仮定して、円筒座標系で以下の式を得る。



$$\text{屈折率分布}\, n^2(r) = \begin{cases} n_1^2 & (r \le a) \\ n_2^2 = n_1^2(1 - 2\Delta) & (r > a) \end{cases} \tag{7.1}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial E_z}{\partial \theta} + (k_0^2 n^2 - \beta^2) E_z = 0 \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial H_z}{\partial \theta} + (k_0^2 n^2 - \beta^2) H_z = 0 \end{aligned} \right\} \tag{7.2}$$

式(7.2)の変形（1）

いまE$_z$についてr成分とθ成分に変数分離を行い、

$$E_Z = R(r)\Theta(\theta)$$

とおいて式(7.2)に代入する。

$$\frac{d^2R}{dr^2}\Theta + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\Theta + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}R + ({k_0}^2{n_i}^2 - \beta^2)R\Theta = 0$$

両辺を $R\Theta$ で割って左辺をrを含む式の辺、右辺をrを含まない式とする。

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{R}\frac{dR}{dr} + ({k_0}^2{n_i}^2 - \beta^2) = -\frac{1}{\Theta}\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}$$

$$\frac{1}{R}r^2\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{R}r\frac{dR}{dr} + ({k_0}^2{n_i}^2 - \beta^2)r^2 = -\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}$$

式(7.2)の変形(2)

左辺においてr= 一定とすると左辺=定数となるので、右辺も定数となる。

この値(分離定数)を l^2 とおくと、右辺から

$$-\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=l^2$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+l^2\Theta=0$$

よって

$$\Theta(\theta)=\cos(l\theta+\varphi)$$

とおける($\Theta(\theta)=Ae^{jl\theta}+Be^{-jl\theta}$ ともおけるが、ここでは

わかりやすさを考えて三角関数で表現した)。

式(7.2)の変形（3）

一方、左辺については

$$\frac{1}{R}r^2\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{R}r\frac{dR}{dr}+(k_0{}^2n_i{}^2-\beta^2)r^2=l^2$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left[(k_0{}^2n_i{}^2-\beta^2)-\frac{l^2}{r^2}\right]R=0 \qquad (A.1)$$

コア内($n_i=n_1$)においては $k_0n_1>\beta$ である。

$k_0{}^2n_1{}^2-\beta^2=\kappa^2$ とおき、 $x=\kappa r$ の変数変換を行うと、

式(A.1)は以下のように変形できる。

$$\frac{d}{dr}=\frac{dx}{dr}\frac{d}{dx}=\kappa\frac{d}{dx}, \qquad \frac{d^2}{dr^2}=\frac{d}{dr}\left(\kappa\frac{d}{dx}\right)=\frac{dx}{dr}\frac{d}{dx}\left(\kappa\frac{d}{dx}\right)=\kappa^2\frac{d^2}{dx^2}$$

式(7.2)の変形（4）

$$\kappa^2\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{\kappa}{x}\kappa\frac{dR}{dx}+\left[\kappa^2-\frac{\kappa^2 l^2}{x^2}\right]R=0$$

$$\therefore\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left[1-\frac{l^2}{x^2}\right]R=0 \qquad (A.2)$$

式(A.2)はベッセルの微分方程式（変数は $x=\kappa r$ ）であり、
基本解は第一種ベッセル関数と第二種ベッセル関数であることがわかる。

一方クラッド内では($n_i=n_2$)においては $k_0 n_2<\beta$ である。

式(A.2)は

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\left[(\beta^2-k_0{}^2 n_2{}^2)+\frac{l^2}{r^2}\right]R=0$$

式(7.2)の変形（5）

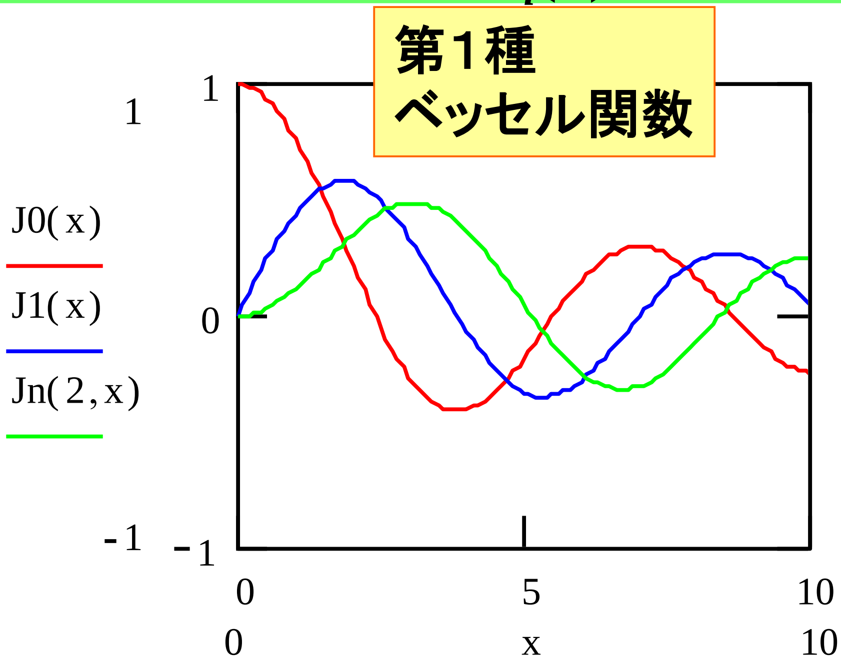
$\beta^2 - k_0{}^2 n_2{}^2 = \gamma^2$　とおき、$x = \gamma r$ の変数変換を行うと前述と同様にして、

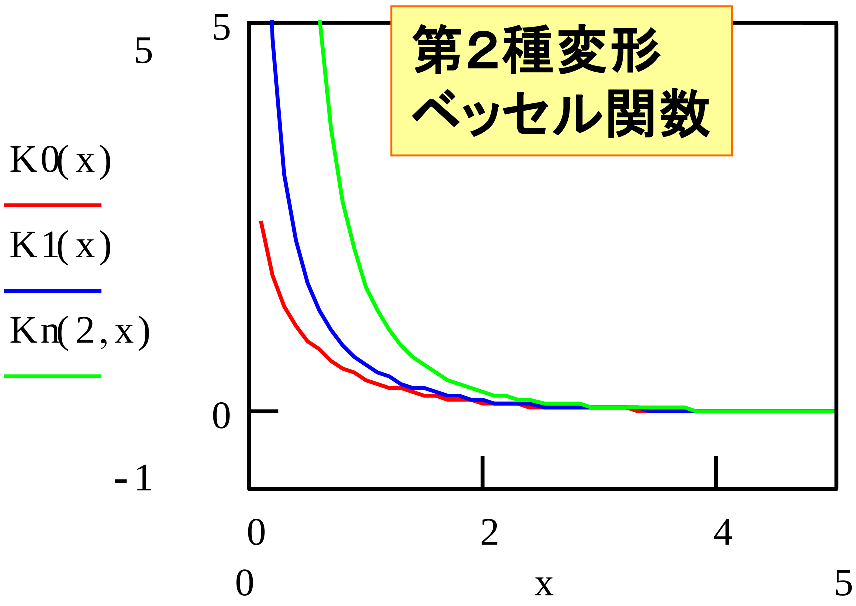
$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} - \left[1 + \frac{l^2}{x^2}\right]R = 0 \qquad (A.3)$$

よって式(A.3)はベッセルの微分方程式（変数は $x = \gamma r$ ）であり、

基本解は第一種変形ベッセル関数と第二種変形ベッセル関数であることがわかる。

光ファイバのモード（２）
第１種ベッセル関数$J_l(x)$, 第２種変形ベッセル関数$K_l(x)$





光ファイバのモード(3)

式(7.1)を(7.2)に代入

⇨ 変数分離法により角度θ依存性は三角関数

半径r依存性はコア内振動解：第1種ベッセル関数$J_\nu(x)$

クラッド内は減衰解：

第2種変形ベッセル関数$K_\nu(x)$

コア内 $(r \leq a)$

$$E_z = A_l J_l(\kappa r)\cos(l\theta + \phi_l) \qquad (7.3)$$

$$H_z = B_l J_l(\kappa r)\cos(l\theta + \psi_l) \qquad (7.4)$$

クラッド内 $(r > a)$

$$E_z = A_l \frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)} K_l(\gamma r)\cos(l\theta + \phi_l) \qquad (7.5)$$

$$H_z = B_l \frac{J_l(\kappa r)}{K_l(\gamma a)} K_l(\gamma r)\cos(l\theta + \psi_l) \qquad (7.6)$$

E_z, H_zがそれぞれ$r=a$において連続となるように係数を考慮

l：角度θ方向のモード番号

光ファイバのモード（4）

θ方向（接線成分）が$r=a$で連続となる条件

$$E_\theta(r \to a+0) = E_\theta(r \to a-0) \qquad (7.7)$$

$$H_\theta(r \to a+0) = H_\theta(r \to a-0) \qquad (7.8)$$

ここで式(3.7), (3.8)の円筒座標系の表現から以下の式を得る。

$$E_\theta = \frac{-j}{\omega^2\varepsilon\mu-\beta^2}\left(\beta\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\theta}-\omega\mu\frac{\partial Hz}{\partial r}\right) \qquad (7.9)$$

$$H_\theta = \frac{-j}{\omega^2\varepsilon\mu-\beta^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial r}+\beta\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\theta}\right) \qquad (7.10)$$

式(7.7), (7.8)を満たす条件から得られる2元連立同次方程式が恒等的に0でない解を持つことから、次式を得る。

光ファイバのモード(5)

$$\frac{k_0^{\,2}\left[\dfrac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)}+\dfrac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}\right]\left[n_1^{\,2}\dfrac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)}+n_2^{\,2}\dfrac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}\right]}{l^2\beta^2\left(\dfrac{1}{(\kappa a)^2}+\dfrac{1}{(\gamma a)^2}\right)^2}$$

$$=-\frac{\sin(l\theta+\phi_l)\sin(l\theta+\psi_l)}{\cos(l\theta+\phi_l)\cos(l\theta+\psi_l)}$$

$$=\frac{\cos(2l\theta+\phi_l+\psi_l)-\cos(\phi_l-\psi_l)}{\cos(2l\theta+\phi_l+\psi_l)+\cos(\phi_l-\psi_l)} \quad (7.11)$$

式(7.11)は$r=a$の至るところで成立しなければいけないので、θに無依存。

$\cos(\phi_l-\psi_l)=0$ ならば右辺=1

$\therefore \phi_l-\psi_l=\pm\dfrac{\pi}{2}$ ⇒ E_zとH_zの角度依存性はπ/2ずれている＝直交

光ファイバのモード（６）

式(7.11)は次式となる。

$$
\left[\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)}+\frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}\right]\left[\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)}+(1-2\Delta)\frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}\right]
=\left(\frac{l\beta}{k_0 n_1}\right)^2\left(\frac{1}{(\kappa a)^2}+\frac{1}{(\gamma a)^2}\right) \qquad (7.12)
$$

階段屈折率円筒光ファイバの固有値方程式

弱導波近似（Weakly-guiding Approximation）（１）

式(7.12)において

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \cong \frac{n_1 - n_2}{n_1} << 1$$

が成り立つ場合には $\beta \cong k_0 n_1$ と近似して（弱導波近似）、

$$[\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}] = \chi l(\frac{1}{(\kappa a)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2}) \qquad (7.13)$$

（ただしχ=+1または-1）

ここで以下のベッセル関数の公式を用いる。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} &= \frac{J_{l-1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} - \frac{l}{(\kappa a)^2} = -\frac{J_{l+1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{l}{(\kappa a)^2} \\
\frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} &= -\frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} - \frac{l}{(\gamma a)^2} = -\frac{K_{l+1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} + \frac{l}{(\gamma a)^2}
\end{aligned}\right\} \quad (7.14)$$

弱導波近似（Weakly-guiding Approximation）（２）

χ= -1の場合（HEモード）

$$\frac{J_{l-1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} - \frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0 \qquad \textbf{(7.15)}$$

χ= +1の場合（EHモード）

$$\frac{J_{l+1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K_{l+1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0 \qquad \textbf{(7.16)}$$

光ファイバのモードの分類(1)

光ファイバの一般解は6つの電磁界($E_r, E_\theta, E_z, H_r, H_\theta, H_z$)をすべて持ったモードである。

⇒ ハイブリッドモード

① HEモード

$\chi = -1$で$l \geq 1$の場合、モード番号を新たに$\nu = l - 1$と振ると、式(7.15)は以下に変形できる。

$$\boxed{\frac{J_{\nu-1}(\sqrt{1-b}V)}{J_\nu(\sqrt{1-b}V)} \cdot \frac{K_\nu(\sqrt{b}V)}{K_{\nu-1}(\sqrt{b}V)} = -\sqrt{\frac{b}{1-b}}} \qquad (7.17)$$

光ファイバのモードの分類(2)

ただし

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
V = k_0 n_1 a \sqrt{2\Delta} & \text{(Vパラメータ or 規格化周波数)} \\
\Delta = \dfrac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \dfrac{n_1 - n_2}{n_1} & \text{(比屈折率差)} \\
b = \dfrac{(\frac{\beta}{k_0})^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} & \text{(規格化伝搬定数)}
\end{array}
\right.
$$

解の固有値bを値の大きいものから順にm = 1, 2, 3,....と振り、
HE$_{l,m}$モードと呼ぶ。

l : 角度θ方向のモード番号
ν: 角度θ方向の節の数の半分
m : 光強度分布が半径方向でとる極大値の数

光ファイバのモードの分類（３）

② TEモード、TMモード

l = 0の場合（ファイバの回転方向に一様な界分布）、

$$\boxed{\frac{J_0(\sqrt{1-b}V)}{J_1(\sqrt{1-b}V)}\cdot\frac{K_1(\sqrt{b}V)}{K_0(\sqrt{b}V)}=-\sqrt{\frac{b}{1-b}}} \quad (7.18)$$

式(7.3)～(7.6)において　$\phi_l=\dfrac{\pi}{2}$ とするとE_z = 0 ⇒ TEモード

$\phi_l=0$ とするとH_z = 0 ⇒ TMモード

光ファイバのモードの分類（4）

③ EHモード

$\chi = +1$で$l \geq 1$の場合、モード番号を新たに$\nu = l + 1$と振ると、式(7.16)は以下に変形できる。

$$\boxed{\frac{J_{\nu-1}(\sqrt{1-b}V)}{J_{\nu}(\sqrt{1-b}V)} \cdot \frac{K_{\nu}(\sqrt{b}V)}{K_{\nu-1}(\sqrt{b}V)} = -\sqrt{\frac{b}{1-b}}} \quad (7.19)$$

LPモード(1)

式(7.17)～(7.19)はすべて同じ形である。
方位角θ方向のモード番号lを変換して

$$\nu = \begin{cases} l-1 : HE_{l,m}\text{モード} \\ l+1 : TE_{0,m}, TM_{0,m}, EH_{l,m}\text{モード} \end{cases}$$

とおくと、同じνを持つ$HE_{\nu+1,m}$モードと$EH_{\nu-1,m}$モードは伝搬定数が同じである。

⇨ 縮退

※弱導波路近似により導出されるものなので、厳密解では
若干差あり
Little difference of propagation constant occurs in the actual modes

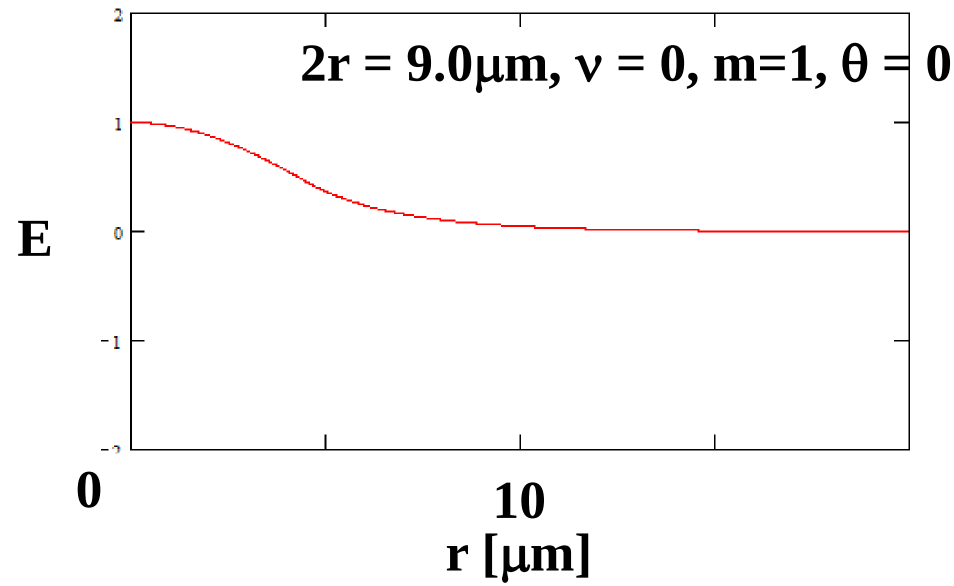
互いに縮退を起こしている固有関数の線形結合から作った固有モードの
組み合わせにより、直線偏光したモードを作ることができる。

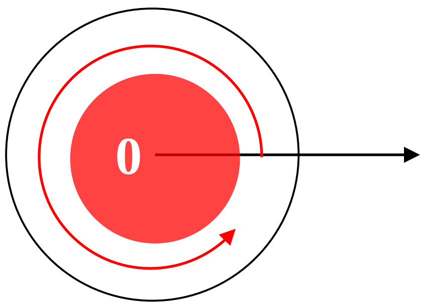
⇨ LP(Linearly Polarized)モード:$LP_{\nu,m}$

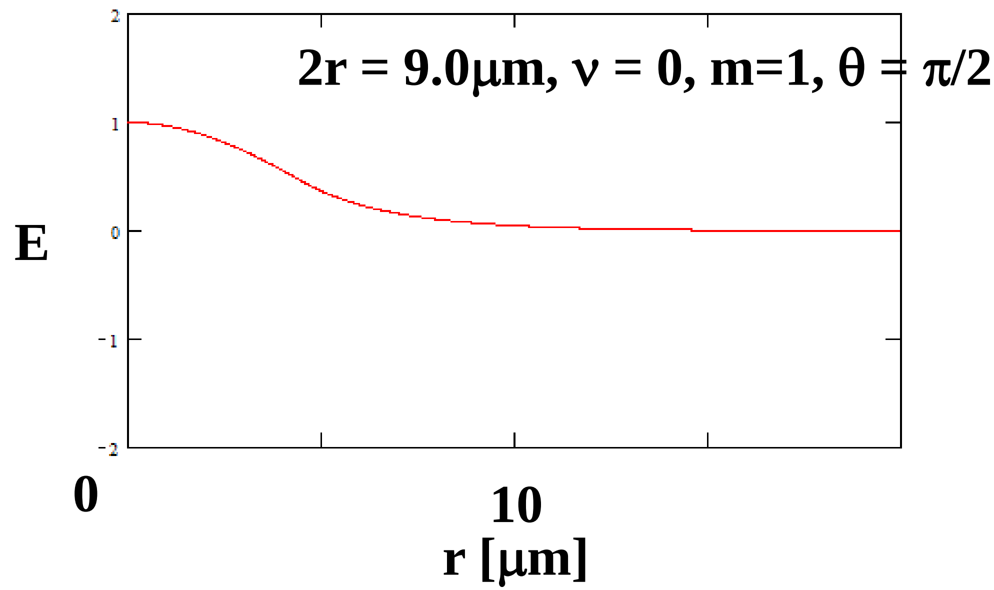
E_xの分布について考える(数式はE_zに類似)。

光ファイバの電界分布(1)

LP01モード

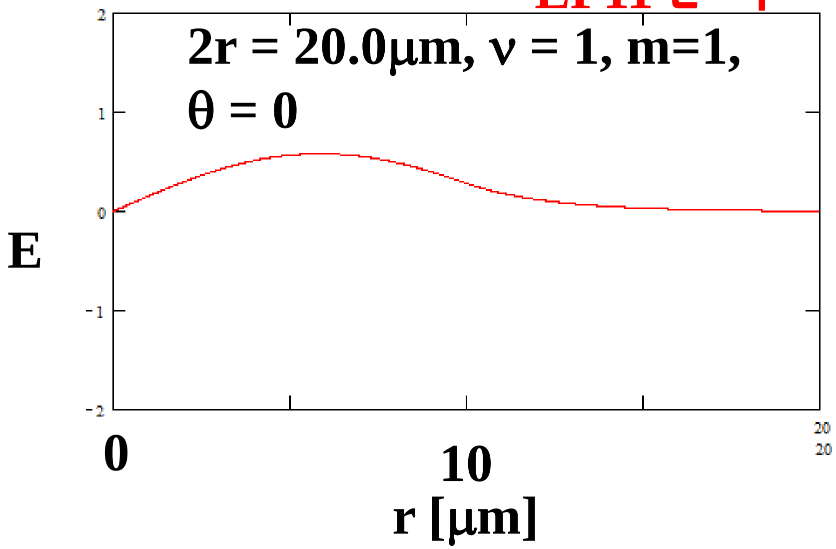


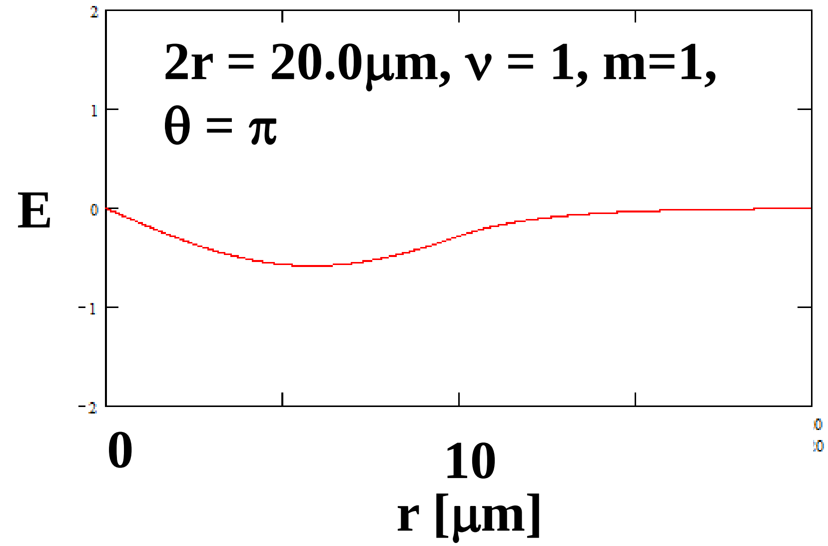


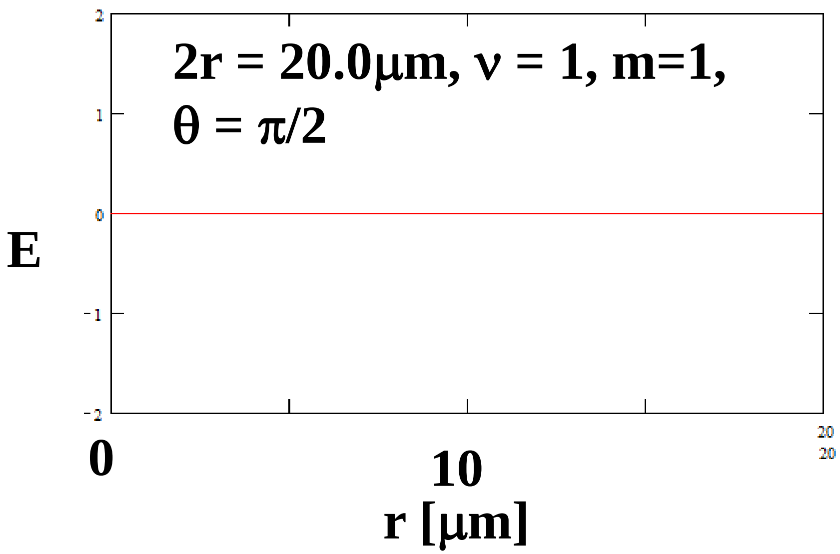


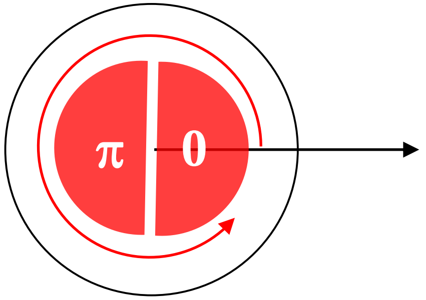
光ファイバの電界分布（2）

LP11モード



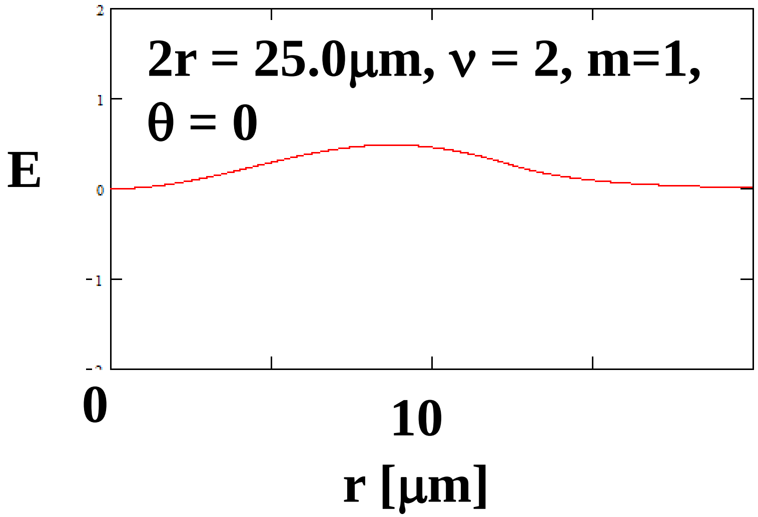


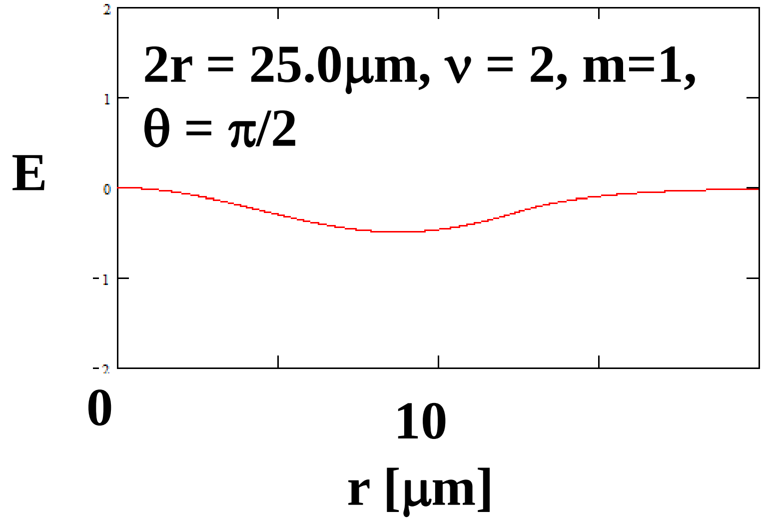


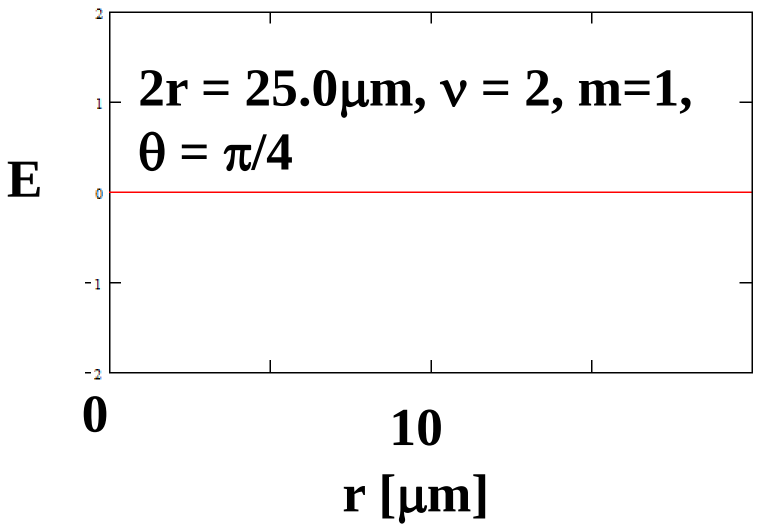


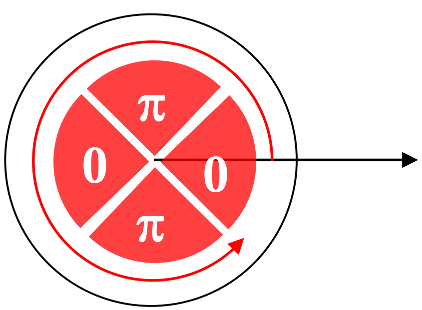
光ファイバの電界分布(３)

LP21モード









LPモード(2)

LPモードと厳密モードの対応

LPモード近似	厳密モード	カットオフV値
$LP_{0,m}$	$HE_{1,m}$	Vc=0 (m=1) J_1(Vc)=0のm-1番目の根(m≥2) 2偏波モードを合わせた2重に縮退
$LP_{1,m}$	$HE_{2,m}$ $TE_{0,m}$ $TM_{0,m}$	Vc=2.4048 (m=1) J_0(Vc)=0のm番目の根(m≥2) 2偏波モードを合わせた4重に縮退 (TE、TMは軸対称のため偏波縮退なし)
$LP_{\nu,m}$ ($\nu \geq 2$)	$HE_{\nu+1,m}$ $EH_{\nu-1,m}$	$J_{\nu-1}$(Vc)=0のm番目の根 2偏波モードを合わせた4重に縮退

光ファイバの分散曲線(1)

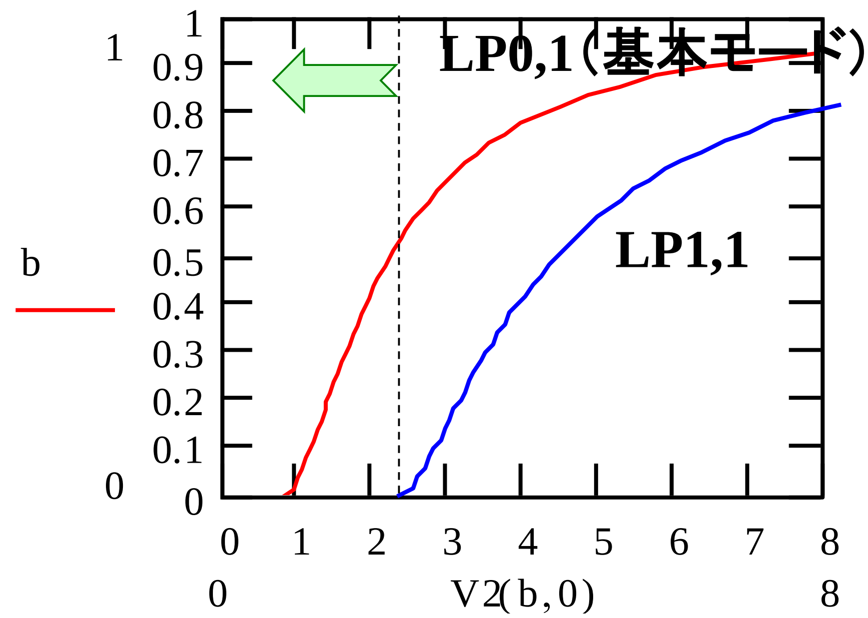
基本モードν=0について考える。式(7.17)にν=0を代入して

$$\frac{J_0(\sqrt{1-b}V)}{J_1(\sqrt{1-b}V)}\cdot\frac{K_1(\sqrt{b}V)}{K_0(\sqrt{b}V)}=-\sqrt{\frac{b}{1-b}}$$

カットオフ条件は、b=0とおいてJ_0(Vc)=0の第一番目の解なので、

$$\boxed{V\leq 2.405}$$

単一モード条件



$$V=k_0n_1a\sqrt{2\Delta}$$ **より**

$$a<\frac{2.405}{k_0n_1\sqrt{2\Delta}}$$

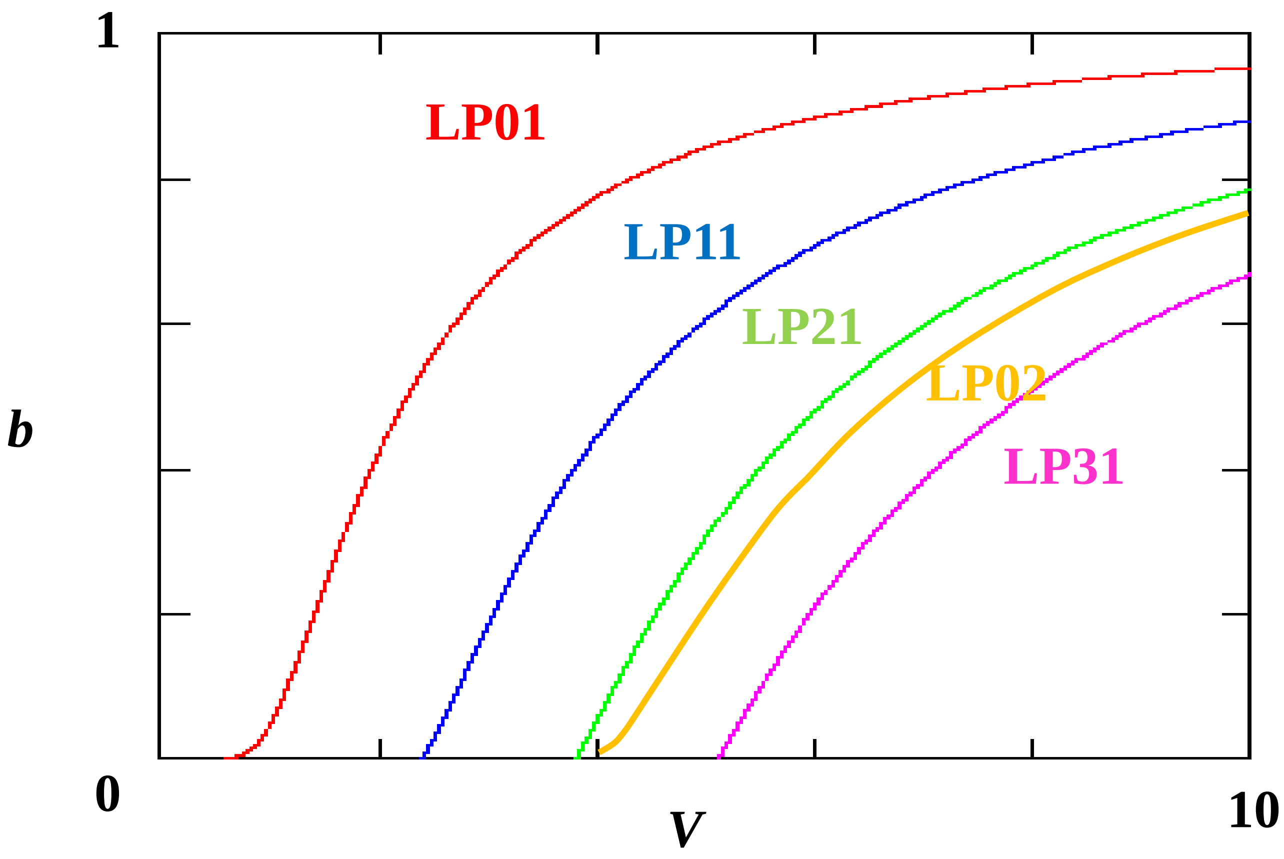
$\Delta=0.003,\ \ n_1=1.46$のとき、

$$a<\frac{2.405\times1.55}{2\pi\times1.46\times\sqrt{2\times0.003}}=5.25\mu m$$

(直径10.5μm以下)

光ファイバの分散曲線（２）

（参考例）岡本勝就著『光導波路の基礎』pp.66　図3.4



最近の光ファイバ研究の傾向

① マルチコア・ファイバ

Multi-Core Fiber

② マルチモード・ファイバ

Multi-Mode Fiber(モード多重伝送用Few Mode Fiber)

③ 空孔アシストファイバ

Hole Assisted Fiber (HAF)

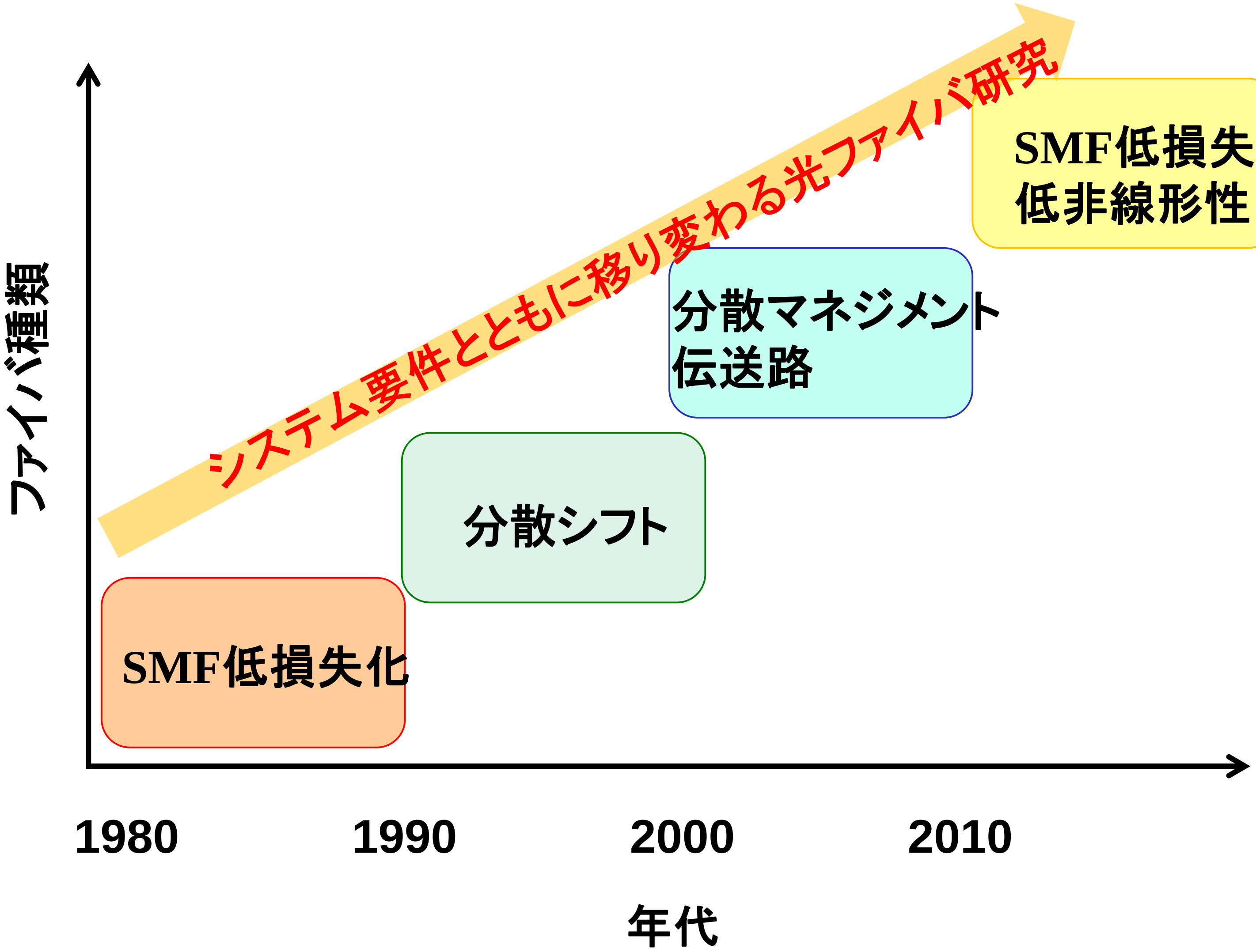
④ フォトニック結晶ファイバ

Photonic Crystal Fiber (PCF)

⑤ フォトニック・バンドギャップ・ファイバ

Photonic Bandgap Fiber (PBF)

デジタルコヒーレント・大容量伝送用ファイバに進展



大容量化(1000倍の容量拡大)を実現する3M技術

- マルチレベル変調(多値変調):×10

  m-PSK, m-QAM, 偏波多重(PDM), O-OFDM(マルチキャリア)

拡大コアによる
非線形低減

- マルチコアファイバ:×10

  空間分割多重(Spatial Division Multiplexing, SDM)

- マルチモード制御:×10

  モード分割多重(Mode Division Multiplexing, MDM)

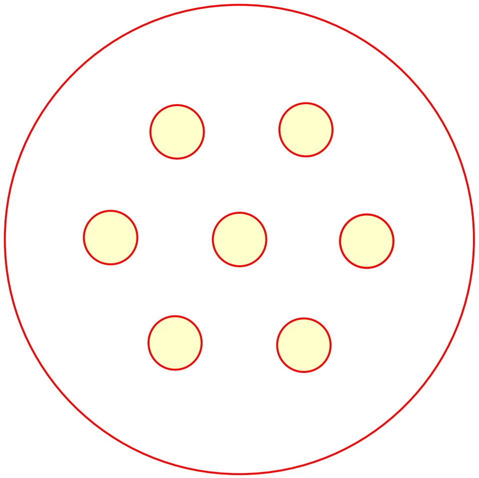
異種コアマルチコア
ファイバ

光ファイバの特性改善例と研究課題

ITUジャーナル vol.39, No.5（EXAT研究会特集）笹岡，武笠，Abedin “光ファイバの限界と課題”p.8 (2009).

	伝送容量へのインパクト	光ファイバの課題
モード数拡大 1 → 10	● モード多重による容量拡大（MIMO等伝送技術は必要） ● V値3倍強（単純ステップ型） →コア断面積10倍（Δn維持） →非線形性低減	● モード数増加だけであれば課題なし ● モード分散制御・モード間結合の抑制等に対して新規設計・開発必要
コア数増大 1 → 10	● 各コアが従来と同等性能であれば容量10倍	● コア間クロストークを考慮した設計 ● 製造技術開発 ● ファイバ相互・機器間接続
伝送損失 1／10	● 光SNR確保 ● 強度／振幅変調多値化 ● 入力パワー減による位相の非線形ノイズ低減 → 位相／周波数変調多値化 ● 非線形性低減の可能性	● PBGFや石英以上に透明な新材料

伝送路の新時代：マルチ･コアファイバ



光ファイバ1本（コアN本）

- 各コアが独立なシングルモードファイバ

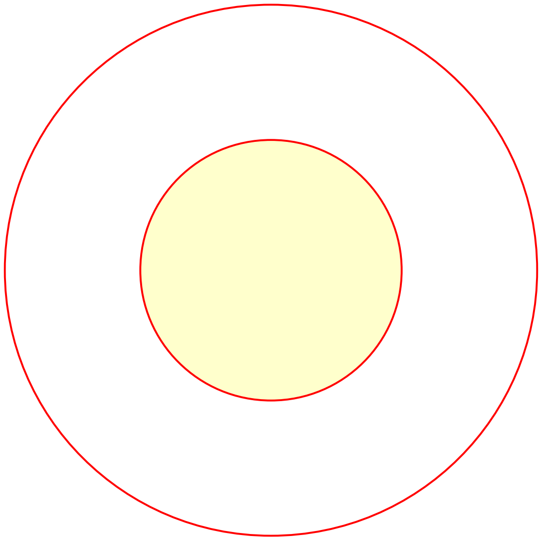
➡ コア数に比例した伝送容量拡張が期待できる

- コア間クロストークの抑制が必要
- マイクロベンディング･ロスの低減が必要
- コア径を太くすると折れやすくなる

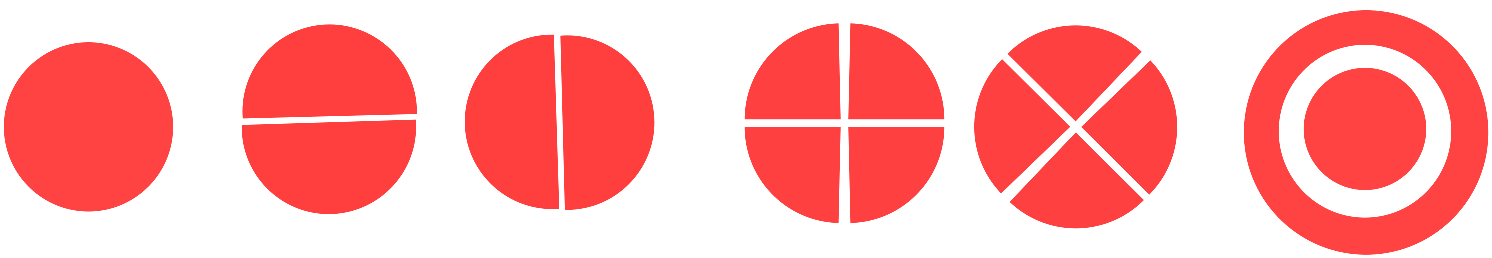
➡ 収容コア数の制限

- SMF ⇔ MCF間接続方法

伝送路の新時代：マルチ・モードファイバ



少モードファイバ（Few mode Fiber, FMF）：
コア径がシングルモードファイバとマルチモードファイバの中間で、数モード（10前後）を持つもの

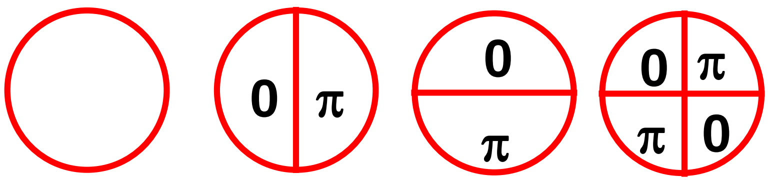


伝送路の新時代：マルチ・モードファイバ

高次モードの生成・多重・分離方式

生成

① 位相板



LP01　LP11e　LP11o　LP21o

② 長周期ファイバ・グレーティング

③ 方向性結合器

多重・分離

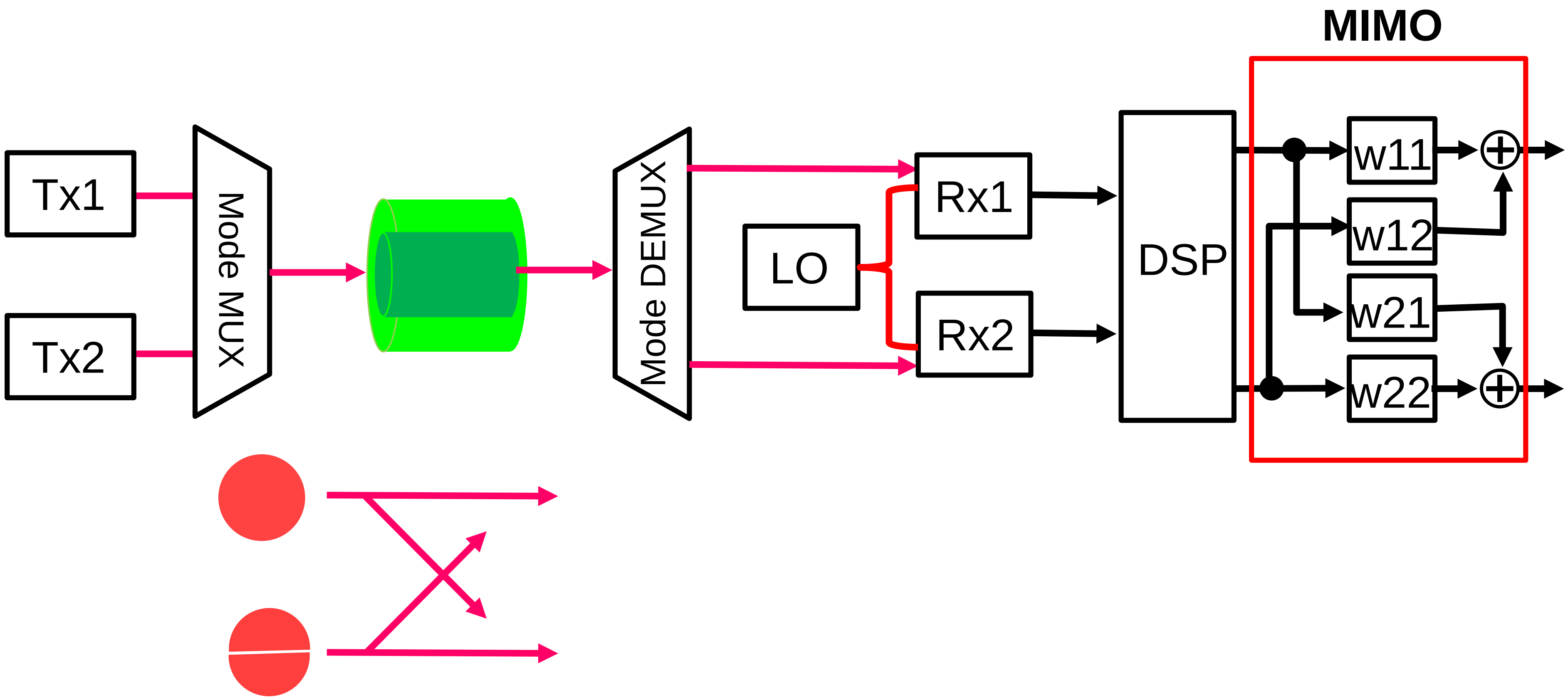
- 自由空間系
- 方向性結合器
- 平面導波路

※この段階の分離信号には、伝送途中でのモード変換成分が線形に混合

→ 分離・再生が必要

→ Multiple-Input/Multiple-Output (MIMO)
行列の特異値分解演算を利用

モード間クロストークの補償



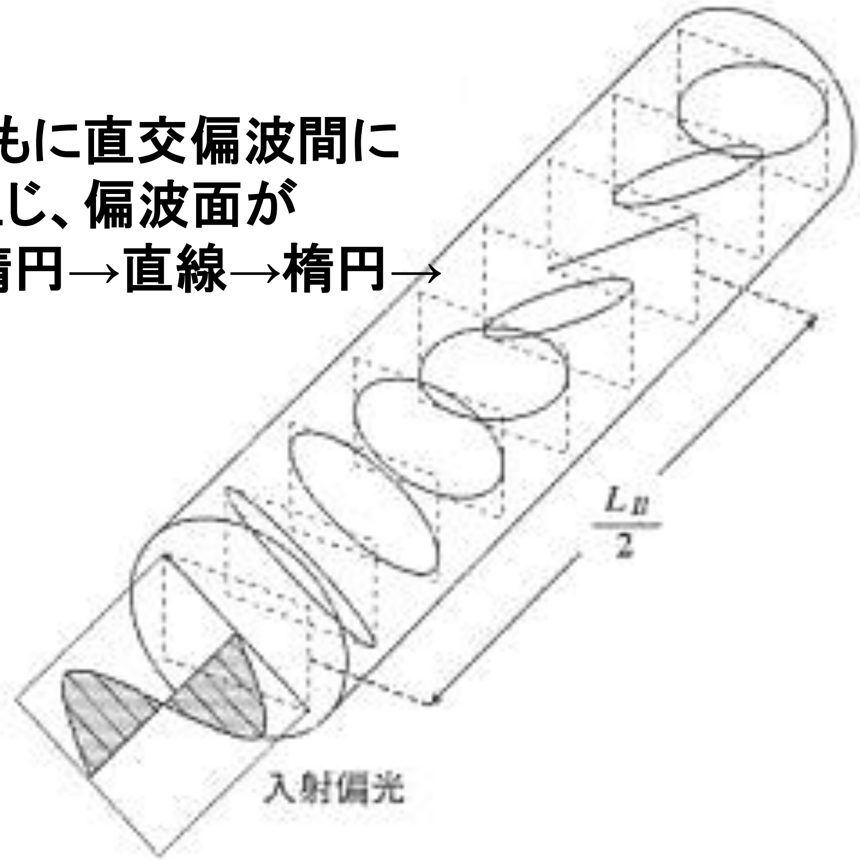
モード間の変換・クロストークの発生 ➡ 重み付け係数wによる補償

偏波

光ファイバ中の偏波状態の変化

- 基本モード（$HE_{1,1}$）は真円コアに対しては中心対称であり偏波状態は縮退する（伝搬定数が等しい）。
- 実際は製造上の非対称性、外部応力により直交偏波間に屈折率差を生ずる（複屈折性）。

⇒ 伝搬とともに直交偏波間に遅延を生じ、偏波面が直線→楕円→直線→楕円→と変化



國分泰雄著 『光波工学』 共立出版 pp. 178図6.10より

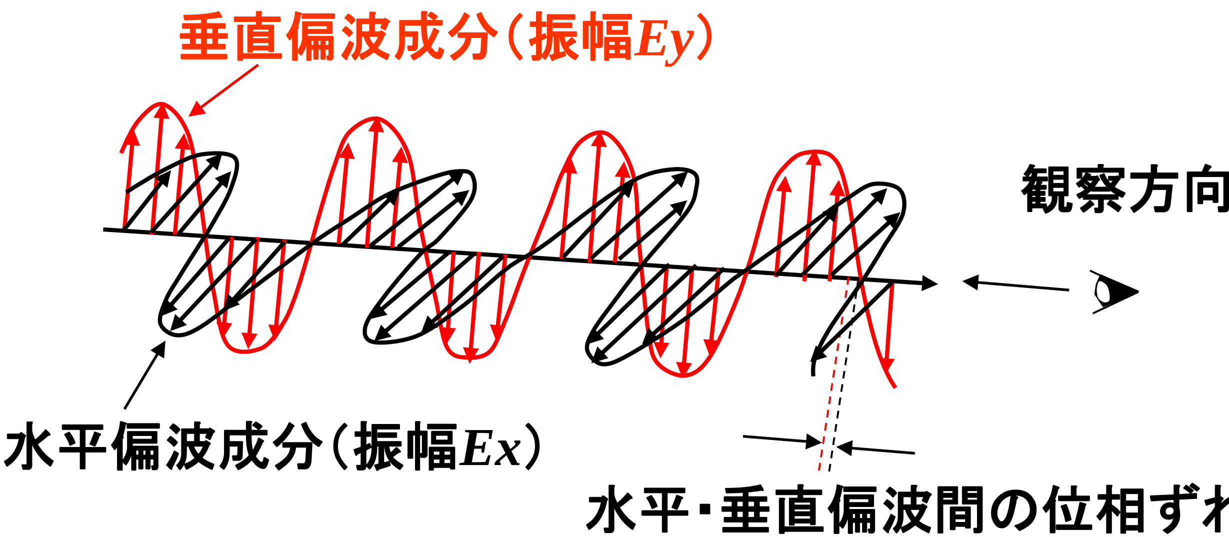
偏波の状態の表現方法(1)

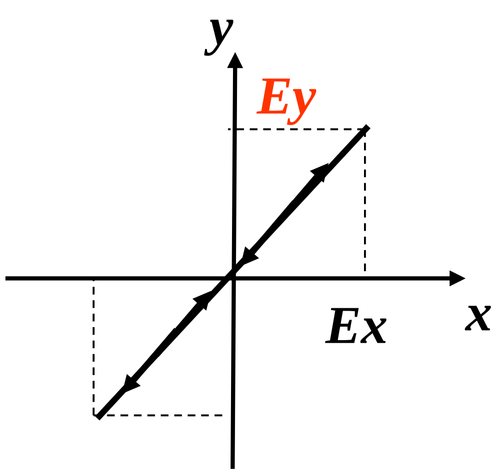
- 直線偏波、円偏波、楕円偏波
- 右回り偏波、左回り偏波

光が進む方向から逆に観察したときに
電界の描く軌跡の形状、変化の方向

水平偏波・垂直偏波に分解したときの各偏波成分の振幅と位相ずれにより偏波状態が決定される。

直線偏波 ($\delta = 0$)

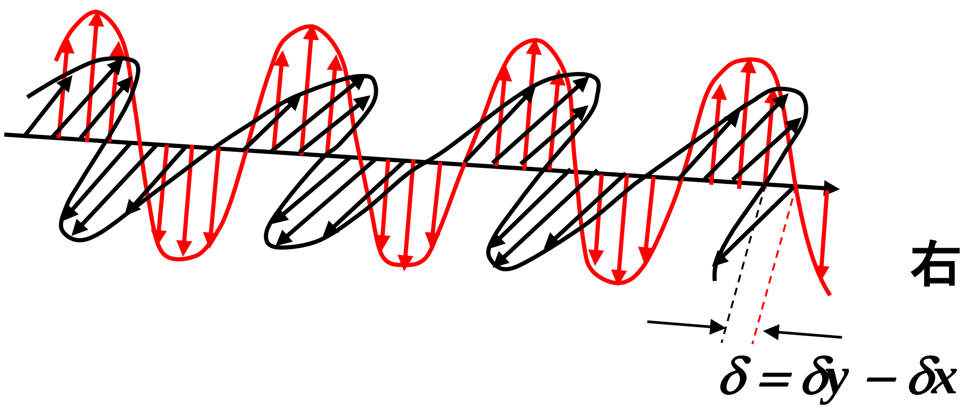




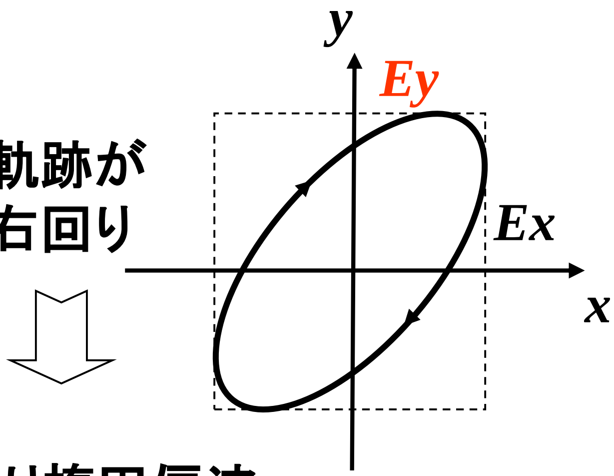
偏波の状態の表現方法(2)

楕円偏波

$0 < \delta < \pi$ (垂直偏波の位相が進む)



軌跡が
右回り



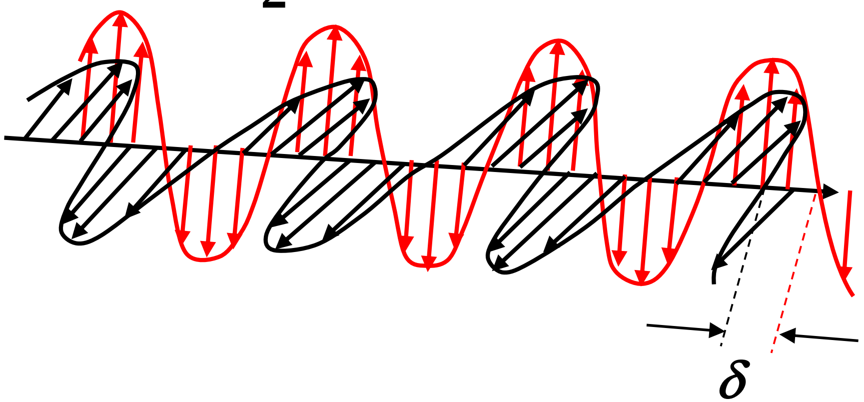
右回り楕円偏波

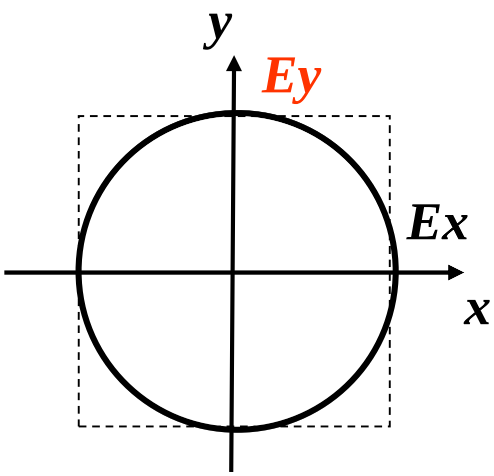
$-\pi < \delta < 0$ (垂直偏波の位相が遅れる) :左回り楕円偏波

偏波の状態の表現方法(3)

円偏波

$\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ かつ$Ex = Ey$





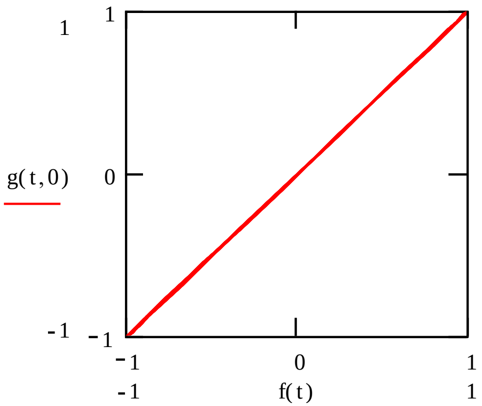
$\delta = \frac{\pi}{2}$:右回り円偏波

$\delta = -\frac{\pi}{2}$:左回り円偏波

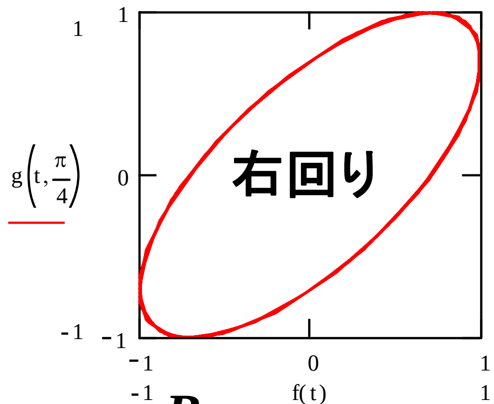
偏波間の位相ずれと偏波状態

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= A\cos\omega t \\ g(t) &= B\cos(\omega t+\delta) \end{aligned}\right\}$$ とおき、t を変化させたときの$f(t)$ ー $g(t)$の軌跡を計算

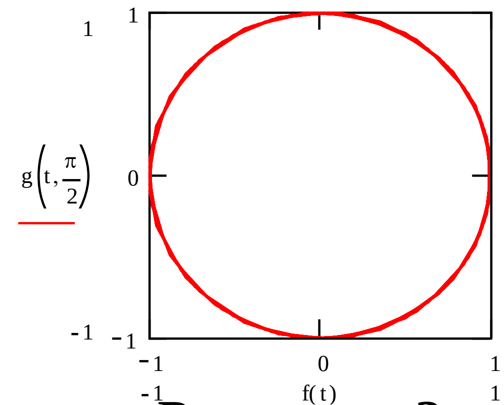
$$\frac{B}{A}=1, \delta=0$$



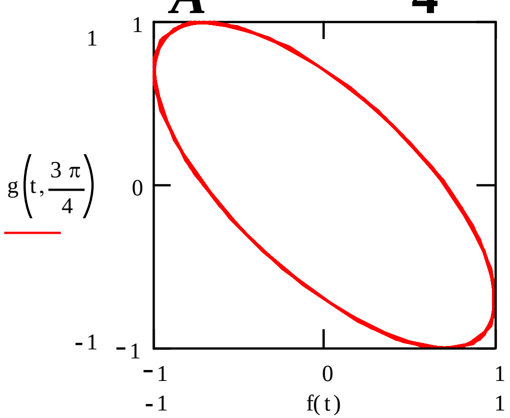
$$\frac{B}{A}=1, \delta=\frac{\pi}{4}$$



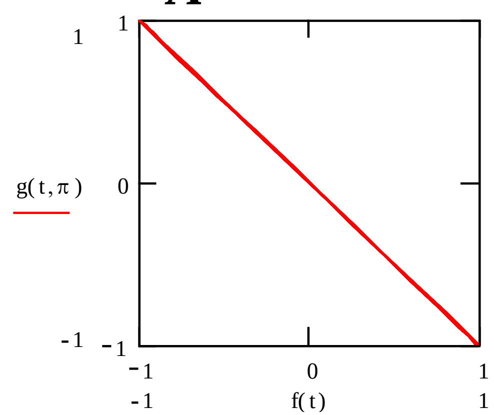
$$\frac{B}{A}=1, \delta=\frac{\pi}{2}$$



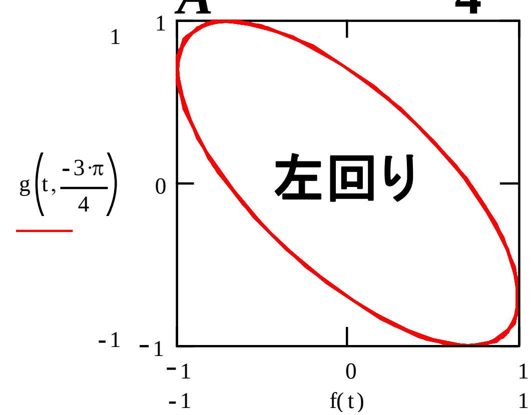
$$\frac{B}{A}=1, \delta=\frac{3\pi}{4}$$



$$\frac{B}{A}=1, \delta=\pi$$



$$\frac{B}{A}=1, \delta=-\frac{3\pi}{4}$$



偏波状態の数式表現(1)

$$
\left.\begin{aligned}
Ex &= Ax\cos(\omega t - \beta z) \qquad (7.20)\\
Ey &= Ay\cos(\omega t - \beta z + \delta) \qquad (7.21)
\end{aligned}\right\}
$$
とおく。

式(7.20)より、

$$\cos(\omega t - \beta z) = \frac{Ex}{Ax} \qquad (7.22)$$

式(7.21)より、

$$Ey = Ay\{\cos(\omega t - \beta z)\cos\delta - \sin(\omega t - \beta z)\sin\delta\}$$

$$\sin(\omega t - \beta z) = \frac{-\dfrac{Ey}{Ay} + \cos(\omega t - \beta z)\cos\delta}{\sin\delta} = \frac{-\dfrac{Ey}{Ay} + \dfrac{Ex}{Ax}\cos\delta}{\sin\delta} \qquad (7.23)$$

$\cos^2(\omega t - \beta z) + \sin^2(\omega t - \beta z) = 1$　に式(7.22)、(7.23)を代入

偏波状態の数式表現(2)

$$\left(\frac{Ex}{Ax}\right)^2+\left(\frac{-\frac{Ey}{Ay}+\frac{Ex}{Ax}\cos\delta}{\sin\delta}\right)^2=1$$

よって、

$$\boxed{\left(\frac{Ex}{Ax}\right)^2+\left(\frac{Ey}{Ay}\right)^2-2\left(\frac{Ex}{Ax}\right)\left(\frac{Ey}{Ay}\right)\cos\delta=\sin^2\delta} \quad (7.24)$$

楕円の式

$\delta=0$ のとき、

$$\left(\frac{Ex}{Ax}\right)^2+\left(\frac{Ey}{Ay}\right)^2-2\left(\frac{Ex}{Ax}\right)\left(\frac{Ey}{Ay}\right)=0$$

$$\therefore Ey=\frac{Ay}{Ax}Ex$$

直線偏波

$\delta=\pi$ のとき、

$$\left(\frac{Ex}{Ax}\right)^2+\left(\frac{Ey}{Ay}\right)^2+2\left(\frac{Ex}{Ax}\right)\left(\frac{Ey}{Ay}\right)=0$$

$$\therefore Ey=-\frac{Ay}{Ax}Ex$$

直線偏波

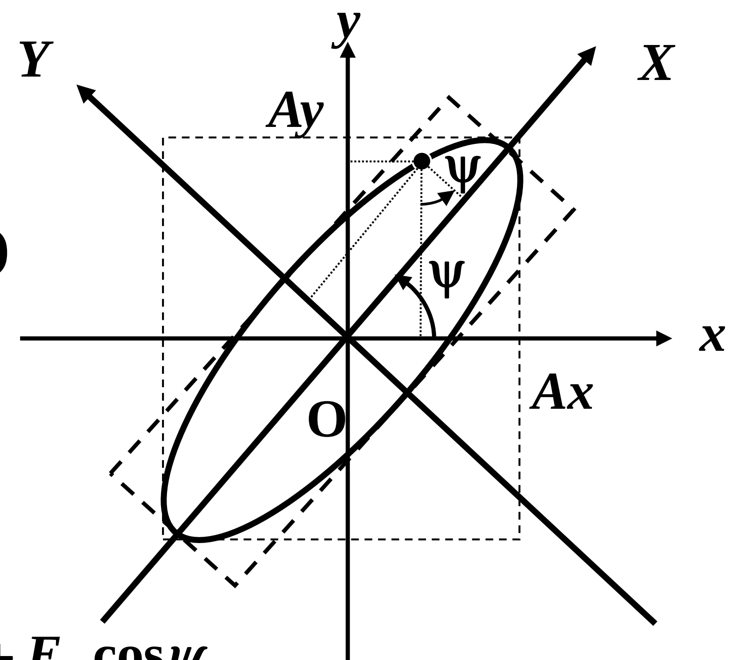
偏波状態の数式表現(3)

$\delta = \frac{\pi}{2}$ のとき、 $(\frac{Ex}{Ax})^2 + (\frac{Ey}{Ay})^2 = 1$ 　軸が水平・垂直方向を向いた楕円

$\delta = \frac{\pi}{2}, Ax = Ay$ のとき、 $Ex^2 + Ey^2 = Ax^2$ 　円

偏波状態の数式表現(4)

楕円が水平・垂直軸方向を向くように座標軸を回転させる。



$$\left.\begin{aligned} Ex &= E_X\cos\psi - E_Y\sin\psi \\ Ey &= E_X\sin\psi + E_Y\cos\psi \end{aligned}\right\} \quad (7.25)$$

を式(7.24)に代入する。

$$\left(\frac{E_X\cos\psi - E_Y\sin\psi}{Ax}\right)^2 + \left(\frac{E_X\sin\psi + E_Y\cos\psi}{Ay}\right)^2$$

$$-2\left(\frac{E_X\cos\psi - E_Y\sin\psi}{Ax}\right)\left(\frac{E_X\sin\psi + E_Y\cos\psi}{Ay}\right)\cos\delta = \sin^2\delta$$

$$\left(\frac{\cos^2\psi}{Ax^2} + \frac{\sin^2\psi}{Ay^2} - 2\frac{\sin\psi\cos\psi\cos\delta}{AxAy}\right)E_X{}^2 + \left(\frac{\sin^2\psi}{Ax^2} + \frac{\cos^2\psi}{Ay^2} + 2\frac{\sin\psi\cos\psi\cos\delta}{AxAy}\right)E_Y{}^2$$

$$+2\left\{\left(\frac{-1}{Ax^2} + \frac{1}{Ay^2}\right)\sin\psi\cos\psi + \frac{-\cos^2\psi + \sin^2\psi}{AxAy}\cos\delta\right)E_X E_Y = \sin^2\delta \qquad (7.26)$$

偏波状態の数式表現(5)

座標変換後、$E_X E_Y$成分は0になるので、

$$\left(\frac{-1}{Ax^2}+\frac{1}{Ay^2}\right)\sin\psi\cos\psi+\frac{-\cos^2\psi+\sin^2\psi}{AxAy}\cos\delta=0 \qquad (7.27)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{Ax^2-Ay^2}{Ax^2Ay^2}\right)\sin 2\psi-\frac{\cos 2\psi}{AxAy}\cos\delta=0$$

$$\tan 2\psi=\frac{\sin 2\psi}{\cos 2\psi}=\frac{2AxAy\cos\delta}{Ax^2-Ay^2}$$

$$\boxed{\therefore \psi=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2AxAy\cos\delta}{Ax^2-Ay^2}\right)} \qquad (7.28)$$

主にAx, Ayの比率の影響を表す。

偏波状態の数式表現(6)

一方、
$$\left.\begin{aligned} E_X &= a\cos(\omega t-\beta z+\delta_0) \\ E_Y &= \pm b\sin(\omega t-\beta z+\delta_0) \end{aligned}\right\} \quad (7.29)$$

とおく(X-Y軸が楕円の長軸・短軸に平行のため、式(7.24)のδ=π/2に相当し、cos, sinで表現したδは同じとなる)。

式(7.25)より

$$\left.\begin{aligned} E_X &= E_x\cos\psi + E_y\sin\psi \\ E_Y &= -E_x\sin\psi + E_y\cos\psi \end{aligned}\right\} \quad (7.30)$$

なので、式(7.20)、(7.21)、(7.29)、(7.30)より

$$a\cos(\omega t-\beta z+\delta_0) = \{A_x\cos(\omega t-\beta z)\}\cos\psi + A_y\cos(\omega t-\beta z+\delta)\sin\psi$$

$$\begin{aligned} a\cos(\omega t-\beta z)\cos\delta_0 - a\sin(\omega t-\beta z)\sin\delta_0 &= A_x\cos(\omega t-\beta z)\cos\psi + A_y\cos(\omega t-\beta z+\delta)\sin\psi \\ &= A_x\cos(\omega t-\beta z)\cos\psi + A_y\{\cos(\omega t-\beta z)\cos\delta - \sin(\omega t-\beta z)\sin\delta\}\sin\psi \\ &= (A_x\cos\psi + A_y\sin\psi\cos\delta)\cos(\omega t-\beta z) - A_y\sin\psi\sin\delta\sin(\omega t-\beta z) \end{aligned}$$

任意のωt-βzに対して成立するために、cos(ωt-bz), sin(ωt-bz)の係数が等しいと考える。

偏波状態の数式表現(7)

$$a\cos\delta_0 = A_x\cos\psi + A_y\sin\psi\cos\delta \qquad (7.31)$$

$$a\sin\delta_0 = A_y\sin\psi\cos\delta \qquad (7.32)$$

また

$$\pm b\sin(\omega t-\beta z+\delta_0) = -A_x\cos(\omega t-\beta z)\sin\psi + A_y\cos(\omega t-\beta z+\delta)\cos\psi$$

$$\pm\left(b\sin(\omega t-\beta z)\cos\delta_0 + b\cos(\omega t-\beta z)\sin\delta_0\right) = -A_x\sin\psi\cos(\omega t-\beta z) + A_y\left\{\cos\delta\cos(\omega t-\beta z) - \sin\delta\sin(\omega t-\beta z)\right\}\cos\psi$$

$$= \left(-A_x\sin\psi + A_y\cos\psi\cos\delta\right)\cos(\omega t-\beta z) - A_y\sin\delta\cos\psi\sin(\omega t-\beta z)$$

cos(ωt-bz), sin(ωt-bz)の係数が等しいと考えて、

$$\pm b\cos\delta_0 = -A_y\sin\delta\cos\psi \qquad (7.33)$$

$$\pm b\sin\delta_0 = -A_x\sin\psi + A_y\cos\psi\cos\delta \qquad (7.34)$$

$(7.31)^2+(7.32)^2$

$$a^2(\cos^2\delta_0 + \sin^2\delta_0) = \left(A_x\cos\psi + A_y\sin\psi\cos\delta\right)^2 + \left(A_y\sin\psi\sin\delta\right)^2$$

$$a^2 = A_x{}^2\cos^2\psi + A_y{}^2\sin^2\psi + 2A_xA_y\sin\psi\cos\psi\cos\delta \qquad (7.35)$$

$(7.33)^2+(7.34)^2$

$$b^2(\cos^2\delta_0 + \sin^2\delta_0) = \left(-A_y\cos\psi\sin\delta\right)^2 + \left(-A_x\sin\psi + A_y\cos\psi\cos\delta\right)^2$$

$$b^2 = A_x{}^2\sin^2\psi + A_y{}^2\cos^2\psi - 2A_xA_y\sin\psi\cos\psi\cos\delta \qquad (7.36)$$

偏波状態の数式表現(8)

$(7.35)^2+(7.36)^2$より、

$$a^2+b^2=A_x{}^2+A_y{}^2 \qquad (7.37)$$

(7.31)×(7.33)＋(7.32)×(7.34)

$$\pm ab\left(\cos^2\delta_0+\sin^2\delta_0\right)$$
$$=\left(A_x\cos\psi+A_y\sin\psi\cos\delta\right)\left(-A_y\sin\delta\cos\psi\right)+\left(A_y\sin\delta\sin\psi\right)\left(-A_x\sin\psi+A_y\cos\psi\cos\delta\right)$$
$$=-A_xA_y\sin\delta\left(\cos^2\psi+\sin^2\psi\right)$$

$$\therefore \pm ab=-A_xA_y\sin\delta \qquad (7.38)$$

(7.37)÷(7.38) $\quad \therefore \dfrac{\pm ab}{a^2+b^2}=-\dfrac{A_xA_y}{A_x{}^2+A_y{}^2}\sin\delta$

$\tan\chi=\mp\dfrac{b}{a}$ とおくと、

$$\therefore \frac{\mp ab}{a^2+b^2}=\mp\frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\tan\chi}{1+\tan^2\chi}=\frac{\sin\chi\tan\chi}{\cos\chi}\cos^2\chi$$
$$=\sin\chi\cos\chi$$

偏波状態の数式表現(9)

$$\frac{1}{2}\sin 2\chi = \frac{A_x A_y}{{A_x}^2 + {A_y}^2}\sin\delta$$

$$\chi = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2AxAy\sin\delta}{Ax^2 + Ay^2}\right)$$

よって、式(7.24)は以下のようにできる。

$$\boxed{\frac{{E_X}^2}{A^2} + \frac{{E_Y}^2}{B^2} = 1}$$

ただし

$$A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}\cos\chi$$

$$B = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}\sin\chi$$

$$\chi = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2AxAy\sin\delta}{Ax^2 + Ay^2}\right)$$

主にδの影響を表す。
(7.39)

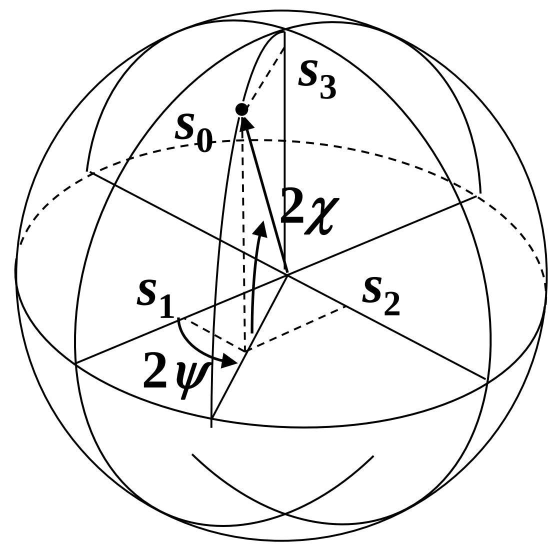
(参考)『光波工学』 栖原 敏明著 コロナ社

ストークスパラメータ

偏光状態は3つのパラメータAx, Ay, δで表現されるがδ の直接的な観測が困難。

⇨ 偏光子、波長板などで測定可能な値を用いた間接的な測定

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= Ax^2 + Ay^2 \\ s_1 &= Ax^2 - Ay^2 \\ s_2 &= 2AxAy\cos\delta \\ s_3 &= 2AxAy\sin\delta \\ &\text{ただし}\ s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \end{aligned}\right\} \quad (7.40)$$



式(7.28)、(7.39)、(7.40)より

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= s_0\cos 2\chi\cos 2\psi \\ s_2 &= s_0\cos 2\chi\sin 2\psi \\ s_3 &= s_0\sin 2\chi \end{aligned}\right\} \quad (7.41)$$

s_0：光パワーに比例
2ψ：電界の長短軸の傾き(＝偏光子透過光パワー最大の角度)
2χ：楕円率(＝偏光子透過光パワー最大と最小の比の正接)

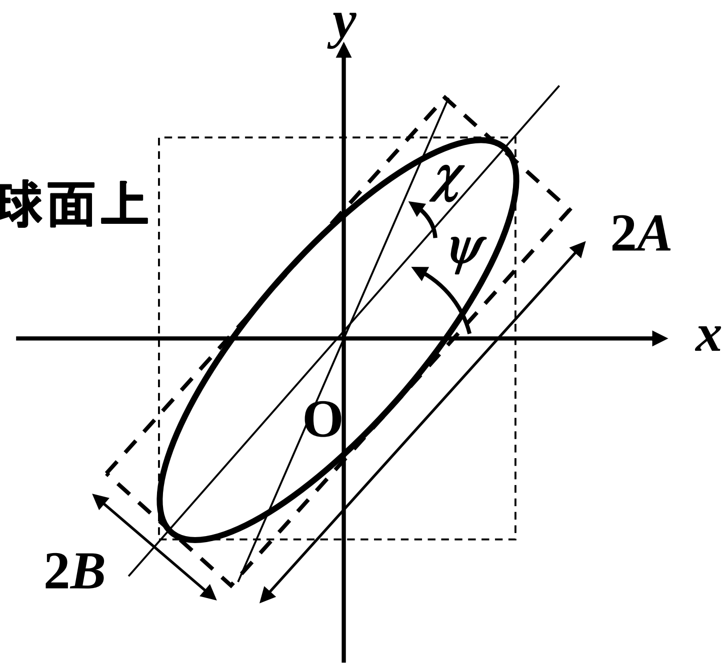
} 観測可能

ポアンカレ球

楕円の主軸が水平軸となす角ψと

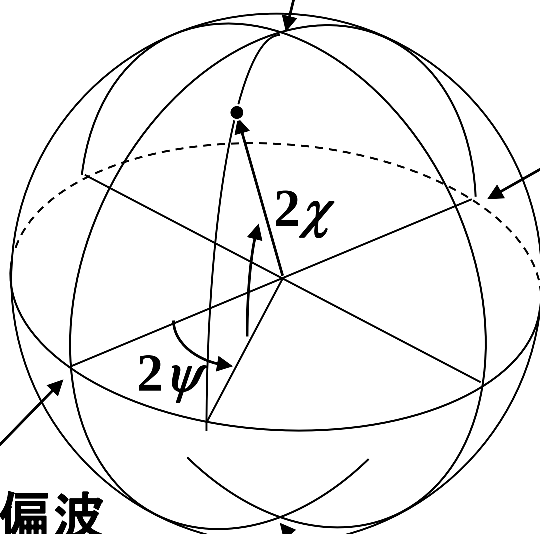
$$|\chi| = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$ をパラメータとして球面上

に偏波状態を表す。



右回り円偏波

$\chi = 45^\circ, \psi = arb.$



垂直直線偏波

$\chi = 90^\circ, \psi = 0^\circ$

水平直線偏波

$\chi = 0^\circ, \psi = 0^\circ$

左回り円偏波 $\chi = -45^\circ, \psi = arb.$