第６回

光ファイバのモード特性
(波動方程式)

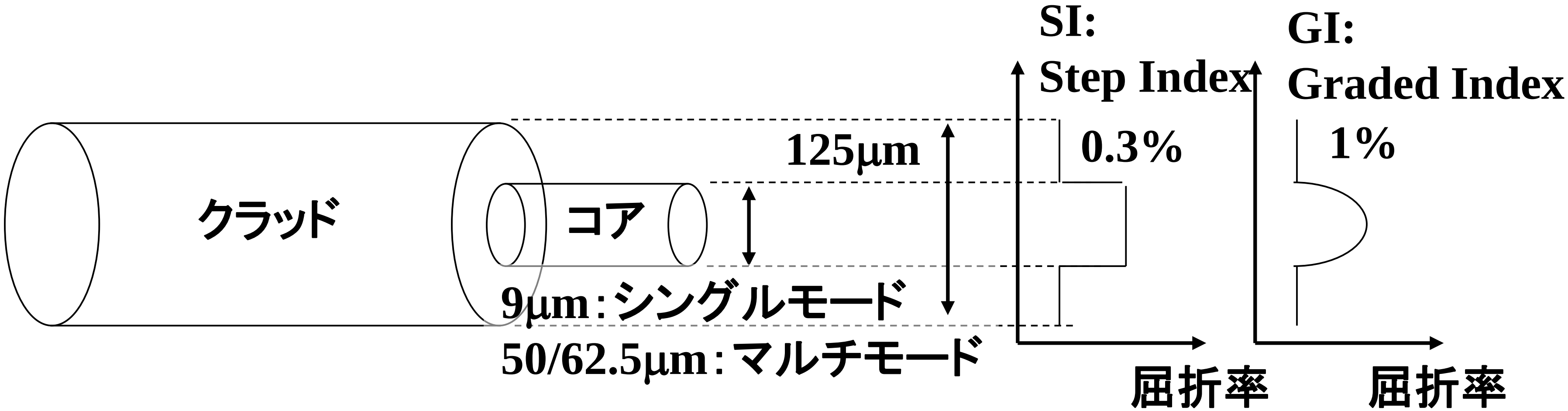
講義スケジュール(1)

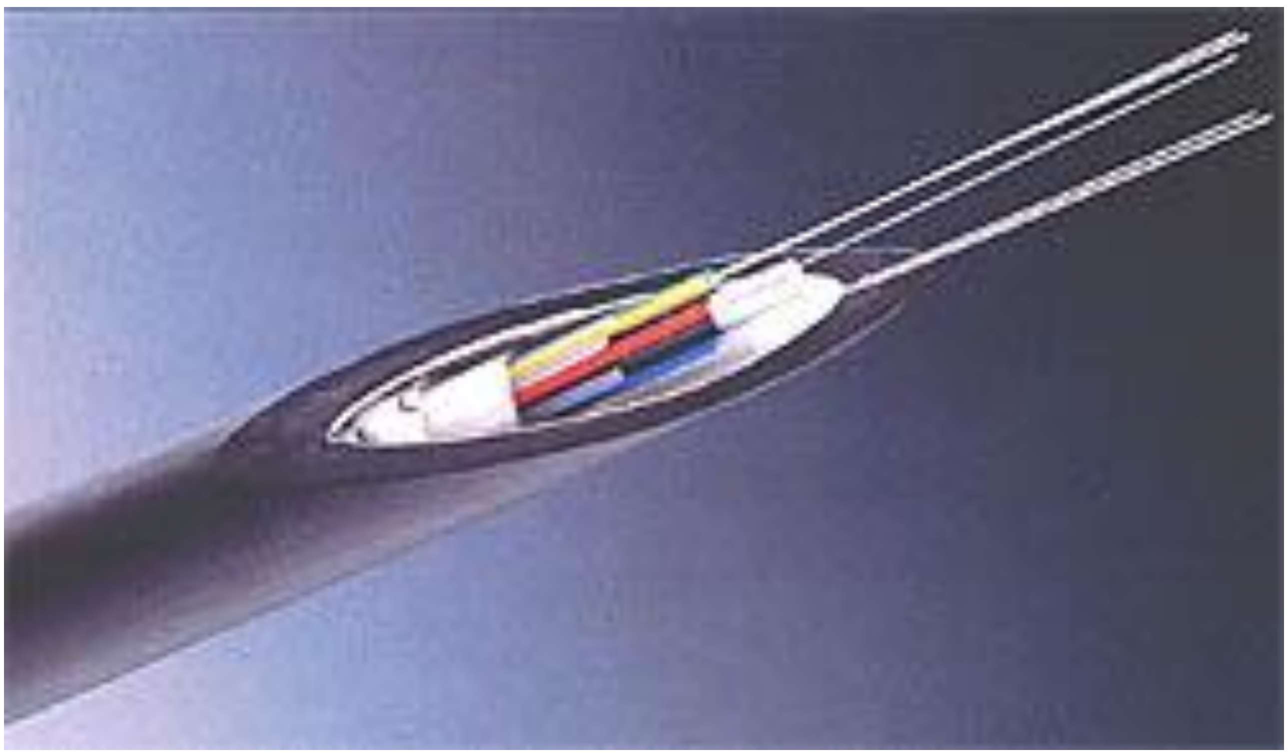
	日付	内容
第1回	10/6	光通信システム(基礎・長距離基幹系)
第2回	10/13	光通信システム(メトロ・アクセス・LAN・インターコネクション)
第3回	10/20	光変調符号
第4回	10/27	光変復調技術(強度変調・位相変調)
第5回	11/10	光変復調技術(デジタル・コヒーレント関連技術)
第6回	11/17	光ファイバのモード特性(波動方程式)
第7回	11/24	光ファイバのモード特性(偏波)
第8回	12/1	ファイバの伝送特性(分散による伝送限界)

講義スケジュール（２）

	日付	内容
第９回	12/8	ファイバの伝送特性(分散補償技術）
第１０回	12/15	光増幅器
第１１回	12/22	ビット誤り率（強度変調・直接検波）
第１２回	1/5	ビット誤り率（コヒーレント、多値変調、光増幅）
第１３回	1/19	波長多重（WDM）伝送(分散マネジメント技術)
第１４回	1/26	波長多重（WDM）伝送(変調技術)
第１５回	2/2	光スイッチング技術・最新の光通信関連技術

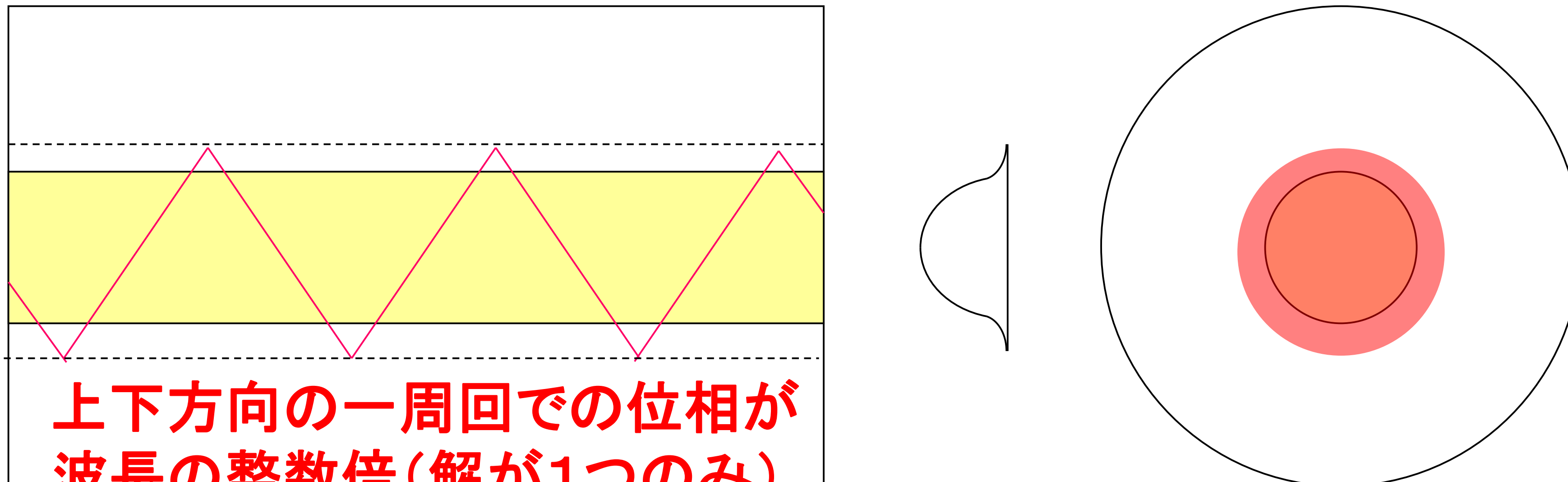
光ファイバケーブル


クラッド
コア
125μm
9μm：シングルモード
50/62.5μm：マルチモード
SI:
Step Index
0.3%
GI:
Graded Index
1%
屈折率
屈折率



シングルモードファイバ・マルチモードファイバとは？（1）

シングルモードファイバ（コア径約9μm）

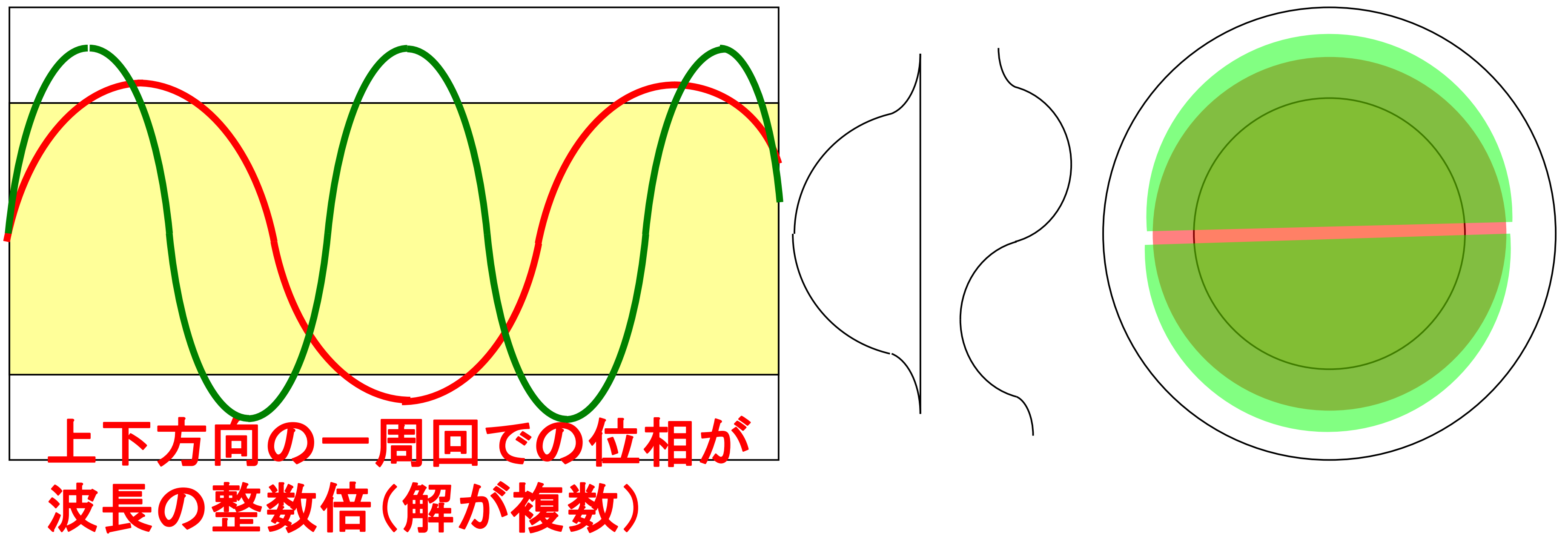


上下方向の一周回での位相が
波長の整数倍（解が1つのみ）

・一つの伝送モードのみ　→　異なるモード間の時間の影響なし
・長距離伝送向き

シングルモードファイバ・マルチモードファイバとは？(2)

マルチモードファイバ(コア径50/62.5μm)



- 複数の伝送モードが許される → 異なるモード間の時間差
- 短距離／低コスト用途向き

波動方程式の導出

マクスウェルの方程式(1)

マクスウェルの方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{t}} \qquad (6.1)$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \qquad (6.2)$$

$$\nabla \cdot D = 0 \qquad (6.3)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \qquad (6.4)$$

仮定

$$\varepsilon = \varepsilon_0 n_i^2 (i = 1,2) \quad (n_i \text{:屈折率})$$

$$\mu = \mu_0 \quad \text{(非磁性体)}$$

$$\sigma = 0 \quad \text{(絶縁体,} J\text{=0)} \qquad (6.5)$$

電界と磁界の時間依存性

$$E = E^0(x,y,z)e^{j\omega t}$$

$$H = H^0(x,y,z)e^{j\omega t} \qquad (6.6)$$

マクスウェルの方程式(2)

式(6.5), (6.6)を式(6.1), (6.2)に代入

$$\nabla\times\boldsymbol{E}^0=-j\omega\mu_0\boldsymbol{H}^0 \qquad (6.7)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}^0=j\omega\varepsilon_0 n_i^2\boldsymbol{E}^0 \qquad (6.8)$$

電界の式

式(6.7)の両辺に ▽× を作用させると、

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}^0=-j\omega\mu_0\nabla\times\boldsymbol{H}^0 \qquad (6.9)$$

左辺＝ $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}^0)-\nabla^2\boldsymbol{E}^0$

式(6.3)より $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}+(\nabla\varepsilon)\cdot\boldsymbol{E}=0$ だから、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E} \Rightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{E}^0=-\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}^0$$

（時間項削除）

マクスウェルの方程式(3)

よって左辺$= -\nabla\left(\frac{\nabla n_i^{\,2}}{n_i^{\,2}}\cdot E^0\right)-\nabla^2 E^0$

式(6.9)の右辺に式(6.8)を代入すると、

右辺$= -j\omega\mu_0\cdot j\omega\varepsilon_0 n_i^{\,2}E^0 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0 n_i^{\,2}E^0$

よって、

$$\boxed{\nabla^2 E^0 + \omega^2\varepsilon_0\mu_0 n_i^{\,2}E^0 = -\nabla\left(\frac{\nabla n_i^{\,2}}{n_i^{\,2}}\cdot E^0\right)}$$

(波動方程式)

(6.10)

右辺は屈折率の空間依存性の項なので、屈折率の一様な媒質あるいは屈折率差が数%と小さい媒質については $\nabla n_i^{\,2} = 0$ より

$$\boxed{\nabla^2 E^0 + \omega^2\varepsilon_0\mu_0 n_i^{\,2}E^0 = 0}$$

(6.11)

マクスウェルの方程式(4)

磁界の式

電界の式の導出と同様に式(6.8)の両辺に $\nabla\times$ を作用させると、

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}^0 = j\omega\varepsilon_0\nabla\times(n_i{}^2\boldsymbol{E}^0)$$

左辺＝ $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{H}^0)-\nabla^2\boldsymbol{H}^0=\nabla\left(\dfrac{\nabla\cdot\boldsymbol{B}^0}{\mu_0}\right)-\nabla^2\boldsymbol{H}^0=-\nabla^2\boldsymbol{H}^0$

（$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ を使用）

右辺＝ $j\omega\varepsilon_0 n_i{}^2(\nabla\times\boldsymbol{E}^0)+\nabla n_i{}^2\times j\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}^0$ （ベクトル公式より）

$$=\omega^2\varepsilon_0\mu_0 n_i{}^2\boldsymbol{H}^0+\frac{\nabla n_i{}^2}{n_i{}^2}\times(\nabla\times\boldsymbol{H}^0)\cong\omega^2\varepsilon_0\mu_0 n_i{}^2\boldsymbol{H}^0$$

よって、

$$\boxed{\nabla^2\boldsymbol{H}^0+\omega^2\varepsilon_0\mu_0 n_i{}^2\boldsymbol{H}^0=0} \qquad (6.12)$$

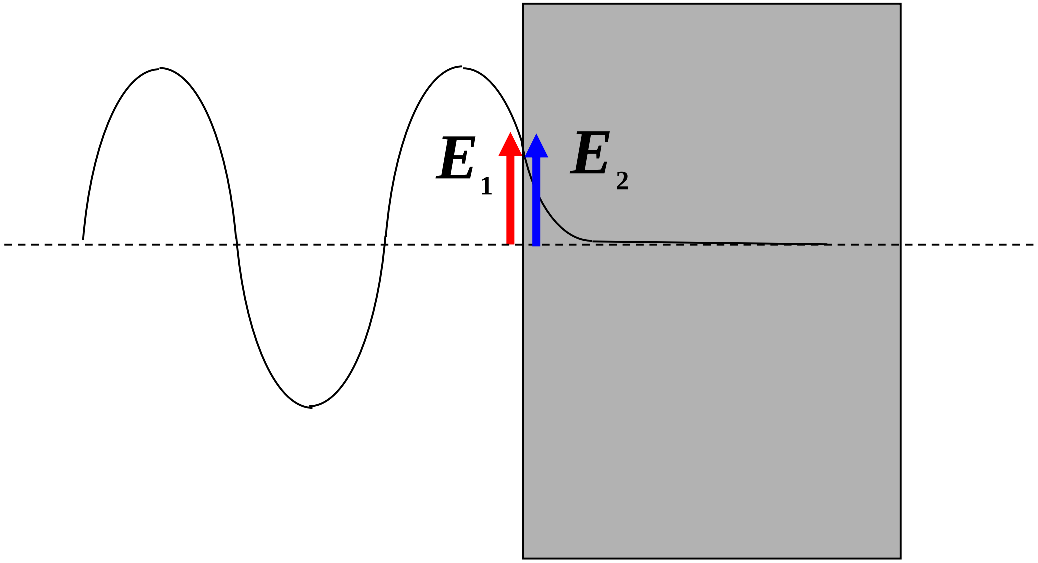
※時間依存の項は場所依存の解に $e^{j\omega t}$ を加えればよい。

解法(1):スラブ導波路

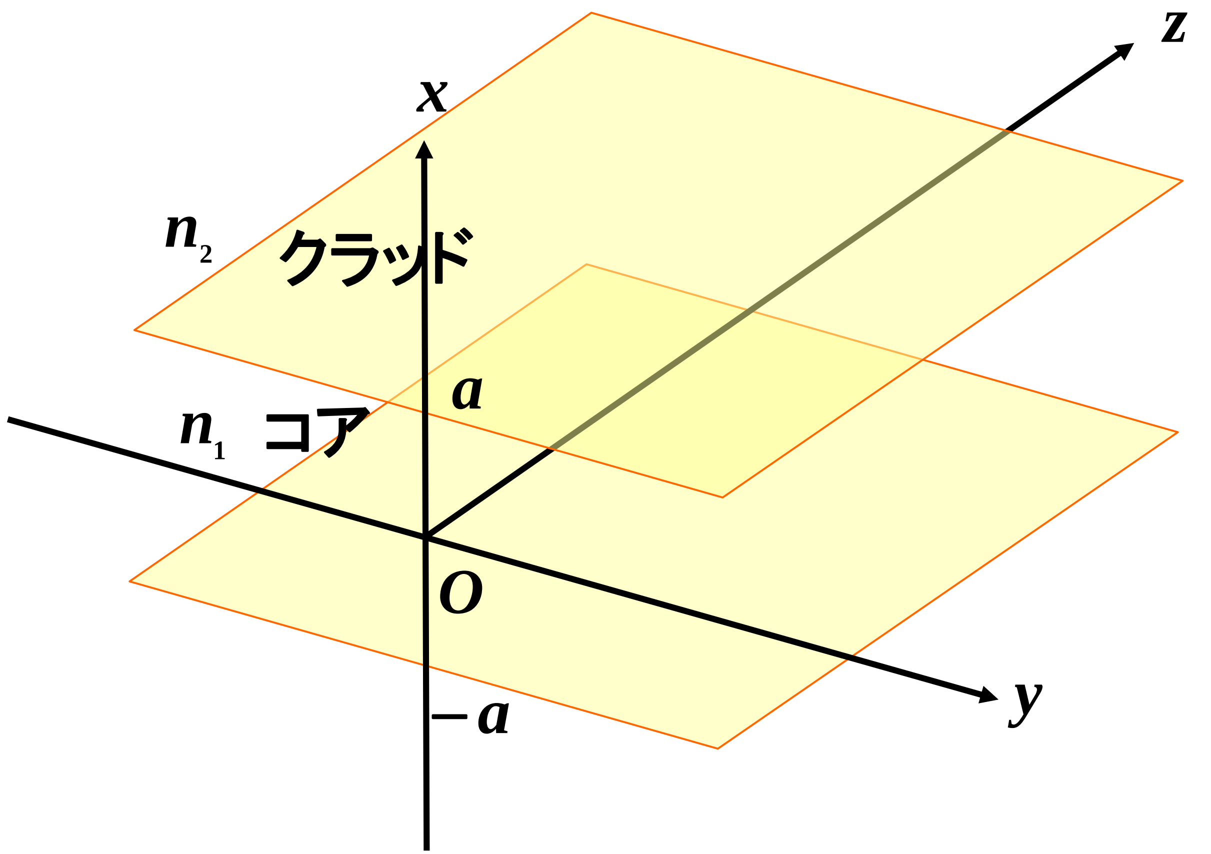
不連続部での境界条件

$\boldsymbol{n}$ を境界面に対する単位法線ベクトルとすると、

$$\begin{cases} (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \times \boldsymbol{n} = 0 & \text{:電界の接線成分が等しい} \\ (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) \times \boldsymbol{n} = 0 & \text{:磁界の接線成分が等しい} \end{cases}$$



（例題） ３層スラブ構造（１）



スラブ構造：コアが y 方向、z方向に無限に広がる構造。
x方向にのみ境界が存在。

※コア幅: $2a$ として以下計算していることに注意。
core thickness = $2a$

TEモードとTMモード(1)

伝搬定数をβとおいて電磁界のz方向依存性を$e^{-j\beta z}$と仮定。

$$\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta$$

⇒ 最終解は以下の解に$e^{j(\omega t-\beta z)}$を補足したものとなる。

スラブ構造の条件

光はy方向に一様であり、 $\dfrac{\partial}{\partial y} = 0$

⇒ 式(6.7), (6.8)を書き下すと次ページの通り。

$$\nabla \times E^0 = -j\omega\mu_0 H^0 \qquad (6.7)$$

$$\nabla \times H^0 = j\omega\varepsilon_0 n_i^2 E^0 \qquad (6.8)$$

TEモードとTMモード（2）

成分	式(6.7)	式(6.8)
x	$j\beta \boxed{E_y} = -j\omega\mu_0 \boxed{H_x}$	$j\beta H_y = j\omega\mu_0 n_i^2 E_x$
y	$-j\beta E_x - \dfrac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}x} = -j\omega\mu_0 H_y$	$-j\beta \boxed{H_x} - \dfrac{\mathrm{d}\boxed{H_z}}{\mathrm{d}x} = j\omega\mu_0 n_i^2 \boxed{E_y}$
z	$\dfrac{\mathrm{d}\boxed{E_y}}{\mathrm{d}x} = -j\omega\mu_0 \boxed{H_z}$	$\dfrac{\mathrm{d}H_y}{\mathrm{d}x} = j\omega\mu_0 n_i^2 E_z$

E_y, H_x, H_zを有する解：$E(0, E_y, 0)$, $H(H_x, 0, H_z)$

TE（Transverse Electric）モード

E_x, E_z, H_yを有する解：$E(E_x, 0, E_z)$, $H(0, H_y, 0)$

TM（Transverse Magnetic）モード

TEモードの解（1）

式(6.11)に$E(0, E_y, 0)$ を代入して、

$$\left(\frac{d^2E_y}{dx^2}+\underbrace{\frac{d^2E_y}{dy^2}}_{=0}+\underbrace{\frac{d^2E_y}{dz^2}}\right)+\omega^2\varepsilon_0\mu_0 {n_i}^2 E_y=0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=-j\beta,\quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}=(-j\beta)^2=-\beta^2$$

$$\frac{d^2E_y}{dx^2}+(\omega^2\varepsilon_0\mu_0 {n_i}^2-\beta^2)E_y=0 \qquad (6.13)$$

更に $k_0{}^2=\omega^2\varepsilon_0\mu_0$ とおいてコア内(n=n_1)とクラッド内(n= n_2)について表現すると、

$$\begin{cases}\dfrac{d^2E_y}{dx^2}+\underbrace{({k_0}^2{n_1}^2-\beta^2)}_{>0}E_y=0 & \text{（コア内）}\quad(6.14)\\[2ex] \dfrac{d^2E_y}{dx^2}-\underbrace{(\beta^2-{k_0}^2{n_2}^2)}_{>0}E_y=0 & \text{（クラッド内）}\quad(6.15)\end{cases}$$

TEモードの解（2）

式(6.14), (6.15)に電界の接線成分の境界条件を適用する。

$$E_y(x \to \pm a_{+0}) = E_y(x \to \pm a_{-0}) \qquad (6.16)$$

ただし複合同順、a_{+0}, a_{-0}はそれぞれコア側、クラッド側から近づけることを意味する。

磁界の接線成分に対しても同様にして、

$$H_z(x \to \pm a_{+0}) = H_z(x \to \pm a_{-0}) \qquad (6.17)$$

$\frac{\partial E_y}{\partial x}$ の連続の式

クラッド内では

$$\left.\begin{aligned} E(x \to \pm\infty) = 0 \\ H(x \to \pm\infty) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (6.18)$$

の条件が適用される。

TEモードの解（3）

電界について

導波モードは $k_0 n_2 \leq \beta \leq k_0 n_1$ を満足する。

式(6.14)、(6.15)について以下の変数をおく。

$$\begin{cases} \kappa^2 = k_0{}^2 n_1{}^2 - \beta^2 \\ \gamma^2 = \beta^2 - k_0{}^2 n_2{}^2 \end{cases}$$

式(6.14)、(6.15)は以下のように変形される。　（Δ：比屈折率差）

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_y}{\mathrm{d}x^2} + \kappa^2 E_y = 0 \quad \text{（コア内）} \qquad (6.19)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_y}{\mathrm{d}x^2} - \gamma^2 E_y = 0 \quad \text{（クラッド内）} \qquad (6.20)$$

TEモードの解(４)

式(6.19)、(6.20)の一般解は以下の式で与えられる。

$$\begin{cases} E_y = Ae^{-j\kappa x} + Be^{j\kappa x} & \text{(コア内)} \quad (6.21) \\ E_y = Ce^{-\gamma x} + De^{\gamma x} & \text{(クラッド内)} \quad (6.22) \end{cases}$$

(6.21) Oscillation
(6.22) Attenuation

まず式(6.18)の条件より、

$$\begin{cases} D = 0 (x > a) & (6.23) \\ C = 0 (x < -a) & (6.24) \end{cases}$$

また式(6.16)より、

$$\begin{cases} Ae^{-j\kappa a} + Be^{j\kappa a} = Ce^{-\gamma a} & (x \to a) \quad (6.25) \\ Ae^{j\kappa a} + Be^{-j\kappa a} = De^{-\gamma a} & (x \to -a) \quad (6.26) \end{cases}$$

TEモードの解（5）

次に $x = \pm a$ において磁界の接線成分H_zが連続である条件(6.17)を用いる。

$$H_z = \frac{j}{\omega\mu_0}\cdot\frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x}$$ だから

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x} = -j\kappa A e^{-j\kappa x} + j\kappa B e^{j\kappa x} & \text{(6.27)} \\ \dfrac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x} = -\gamma C e^{-\gamma x} + \gamma D e^{\gamma x} & \text{(6.28)} \end{cases}$$

より、

$$\begin{cases} -j\kappa A e^{-j\kappa a} + j\kappa B e^{j\kappa a} = -\gamma C e^{-\gamma a} & (x = a) \\ -j\kappa A e^{j\kappa a} + j\kappa B e^{-j\kappa a} = \gamma D e^{-\gamma a} & (x = -a) \end{cases}$$

TEモードの解(6)

変形して、

$$\begin{cases} Ae^{-j\kappa a} - Be^{j\kappa a} = -\dfrac{j\gamma C}{\kappa} e^{-\gamma a} & (x = a) \quad \textbf{(6.29)} \\ Ae^{j\kappa a} - Be^{-j\kappa a} = \dfrac{j\gamma D}{\kappa} e^{-\gamma a} & (x = -a) \quad \textbf{(6.30)} \end{cases}$$

***A*とBの関係を求めるため、*C*および*D*を消去する。**

(6.29)÷(6.25)より、

$$\frac{Ae^{-j\kappa a} - Be^{j\kappa a}}{Ae^{-j\kappa a} + Be^{j\kappa a}} = -\frac{j\gamma}{\kappa} \quad \textbf{(6.31)}$$

(6.30)÷(6.26)より、

$$\frac{Ae^{j\kappa a} - Be^{-j\kappa a}}{Ae^{j\kappa a} + Be^{-j\kappa a}} = \frac{j\gamma}{\kappa} \quad \textbf{(6.32)}$$

さらに(6.31)÷(6.32)を計算して右辺の変数を消去

TEモードの解(7)

$$\frac{(Ae^{-j\kappa a}-Be^{j\kappa a})(Ae^{j\kappa a}+Be^{-j\kappa a})}{(Ae^{-j\kappa a}+Be^{j\kappa a})(Ae^{j\kappa a}-Be^{-j\kappa a})}=-1$$

変形して、$A^2=B^2$を得る。

① $A=B$の場合

式(6.25)より
$$A(e^{j\kappa a}+e^{-j\kappa a})=Ce^{-\gamma a}$$

$$2A\cos(\kappa a)=Ce^{-\gamma a} \qquad \textbf{(6.33)}$$

式(6.29)より
$$A\left(e^{-j\kappa a}-e^{j\kappa a}\right)=-\frac{j\gamma C}{\kappa}e^{-\gamma a}$$

$$2A\sin(\kappa a)=\frac{\gamma C}{\kappa}e^{-\gamma a} \qquad \textbf{(6.34)}$$

(6.34)÷(6.33)より、 $\boxed{\tan(\kappa a)=\frac{\gamma}{\kappa}=\frac{\gamma a}{\kappa a}}$ **(6.35)**

TEモードの偶数次モード

TEモードの解(8)

① $A=-B$の場合

式(6.25)より

$$A(e^{j\kappa a}-e^{-j\kappa a})=-Ce^{-\gamma a}$$

$$2A\sin(\kappa a)=jCe^{-\gamma a} \qquad (6.36)$$

式(6.29)より

$$A(e^{j\kappa a}+e^{-j\kappa a})=jCe^{-\gamma a}$$

$$2A\cos(\kappa a)=-\frac{j\gamma C}{\kappa}e^{-\gamma a} \qquad (6.37)$$

(6.37)÷(6.36)より、 $\boxed{\cot(\kappa a)=-\frac{\gamma}{\kappa}=-\frac{\gamma a}{\kappa a}}$ (6.38)

TEモードの奇数次モード

(6.35)と(6.38)を一つの式にまとめると、

$$\boxed{\tan\left(\kappa a+\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{\gamma a}{\kappa a} \qquad (n=0,1,2,\cdots)} \qquad (6.39)$$

n: 横モードの次数
order of transverse (lateral) mode

対称3層スラブ導波路のモード電磁界式

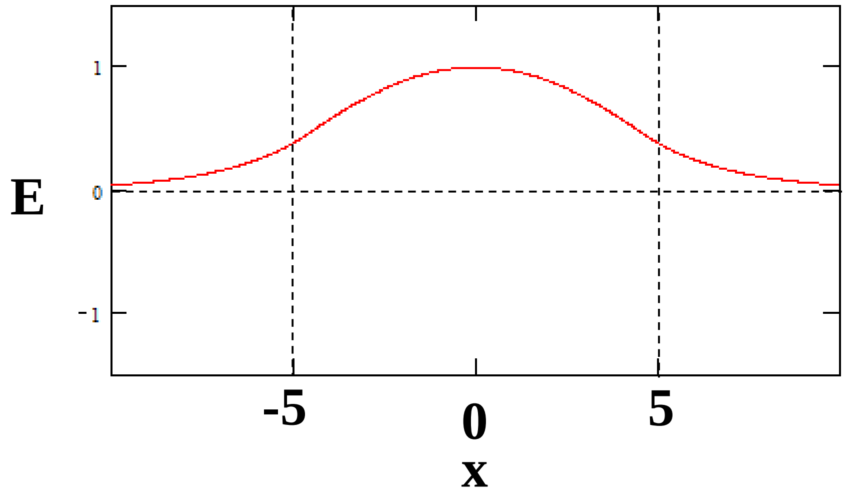
モード	モード電磁界式		固有値方程式
	$\lvert x\rvert \le a$	$\lvert x\rvert > a$	
TE偶数次	$E_y = A_e \cos(\kappa x)$	$E_y = A_e \cos(\kappa a) \cdot e^{-\gamma(\lvert x\rvert - a)}$	$\tan(\kappa a) = \dfrac{\gamma a}{\kappa a}$
TE奇数次	$E_y = A_o \sin(\kappa x)$	$E_y = \dfrac{x}{\lvert x\rvert} A_o \sin(\kappa a) \cdot e^{-\gamma(\lvert x\rvert - a)}$	$\cot(\kappa a) = -\dfrac{\gamma a}{\kappa a}$
TM偶数次	$H_y = B_e \cos(\kappa x)$	$H_y = B_e \cos(\kappa a) \cdot e^{-\gamma(\lvert x\rvert - a)}$	$\tan(\kappa a) = \boxed{\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^2} \dfrac{\gamma a}{\kappa a}$
TM奇数次	$H_y = B_o \sin(\kappa x)$	$H_y = \dfrac{x}{\lvert x\rvert} B_o \sin(\kappa a) \cdot e^{-\gamma(\lvert x\rvert - a)}$	$\cot(\kappa a) = -\boxed{\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^2} \dfrac{\gamma a}{\kappa a}$

複屈折性
birefringence

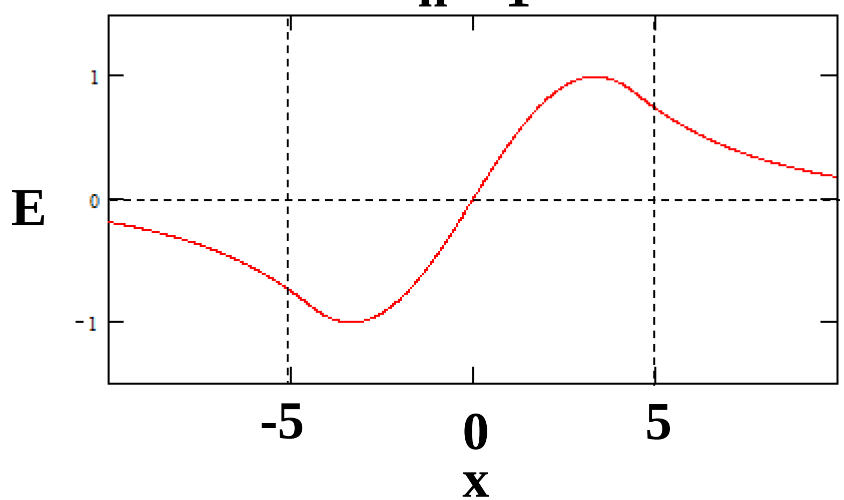
スラブ導波路の電界分布（1）

$$n_1 = 1.485,\ n2 = 1.48,\ \Delta = \frac{n_1^{\ 2} - n_2^{\ 2}}{2n_1^{\ 2}} = 0.3\%,\ 2d = 10.0\mu m$$

n = 0 (基本モード)



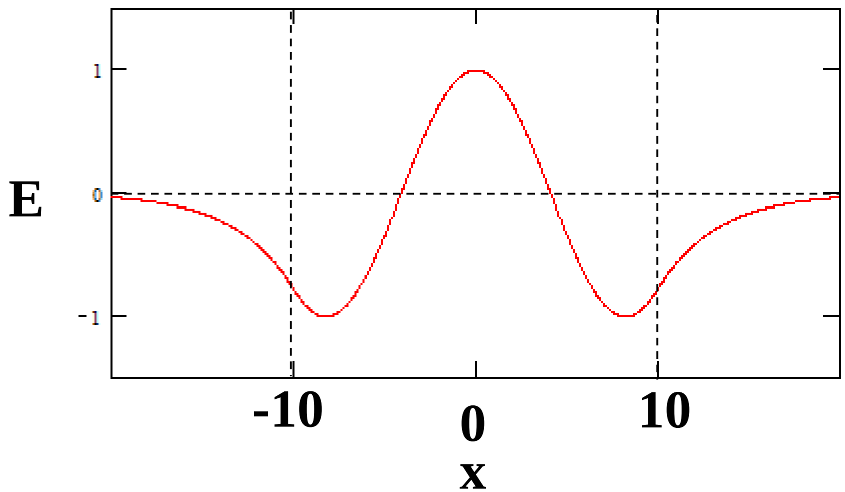
n = 1



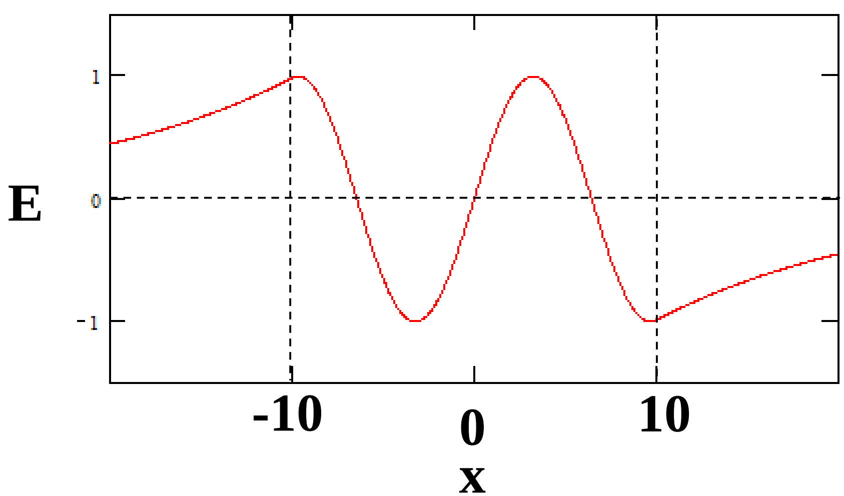
スラブ導波路の電界分布(2)

n_1 = 1.49, n2 = 1.48, Δ = 0.7%, 2d = 20.0μm

n = 2



n = 3



固有値(特性)方程式(1)

式(6.39)を規格化した変数で表現する。

⇨ 構造パラメータの変化に対する伝搬定数の変化の特性を一般化できる。

V: Vパラメータ(規格化周波数)

$$\left\{\begin{array}{l}\kappa^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \\ \gamma^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(\kappa a)^2 + (\gamma a)^2 = (k_0 a)^2 (n_1^2 - n_2^2) = V^2}$$

半径(V/a)、中心Oのκ-γ座標の円

ただし
$$\boxed{V = k_0 n_1 a \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{n_1^2 - n_2^2}{2 n_1^2}} = k_0 n_1 a \sqrt{2\Delta}}$$

Δ: 比屈折率差

固有値方程式(2)

規格化伝搬定数b

以下の式で規格化伝搬定数bを定義する。

$$\boxed{b=\frac{(\beta/k_0)^2-n_2^2}{n_1^2-n_2^2}}$$

$$b=\frac{(\beta^2-k_0^2n_2^2)a^2}{(k_0a)^2(n_1^2-n_2^2)}=\frac{(\gamma a)^2}{(\kappa a)^2+(\gamma a)^2}=(\frac{\gamma a}{V})^2 \quad (6.40)$$

よって、 $\gamma a=V\sqrt{b} \quad (6.41)$

固有値方程式(3)

式(6.40)を変形して、

$$\kappa a = \sqrt{(\frac{1}{b} - 1)(\gamma a)^2} = V\sqrt{1-b} \qquad (6.42)$$

(6.41), (6.42)を(6.39)に代入して変形し、以下の式を得る。

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-b}}\{\tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{1-b}} + \frac{n\pi}{2}\} \qquad (n = 0,1,2,\cdots) \quad (6.43)$$

TEモードの固有値方程式

TMモードについても同様にして以下の式を得ることができる。

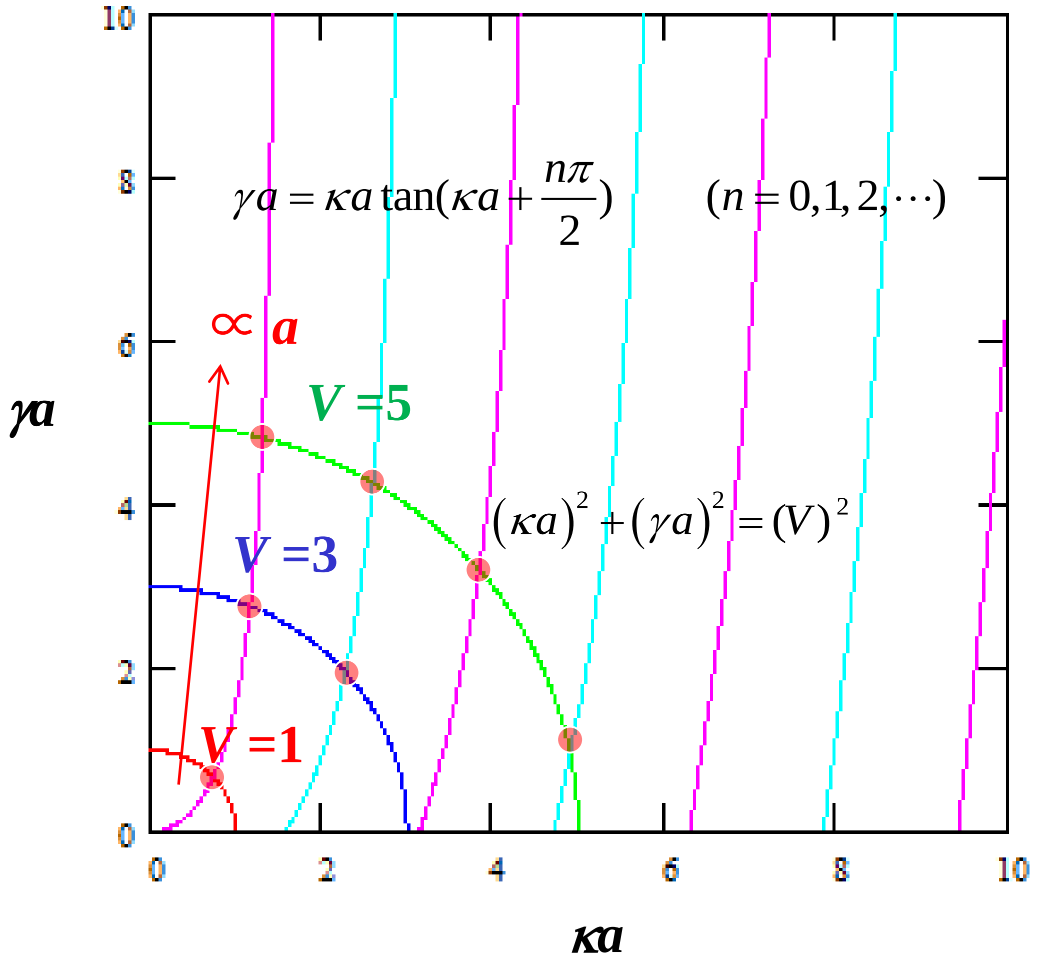
$$V = \frac{1}{\sqrt{1-b}}[\tan^{-1}\{(\frac{n_1}{n_2})^2\sqrt{\frac{b}{1-b}}\} + \frac{n\pi}{2}] \qquad (n = 0,1,2,\cdots) \quad (6.44)$$

TMモードの固有値方程式

固有値方程式の解の図示

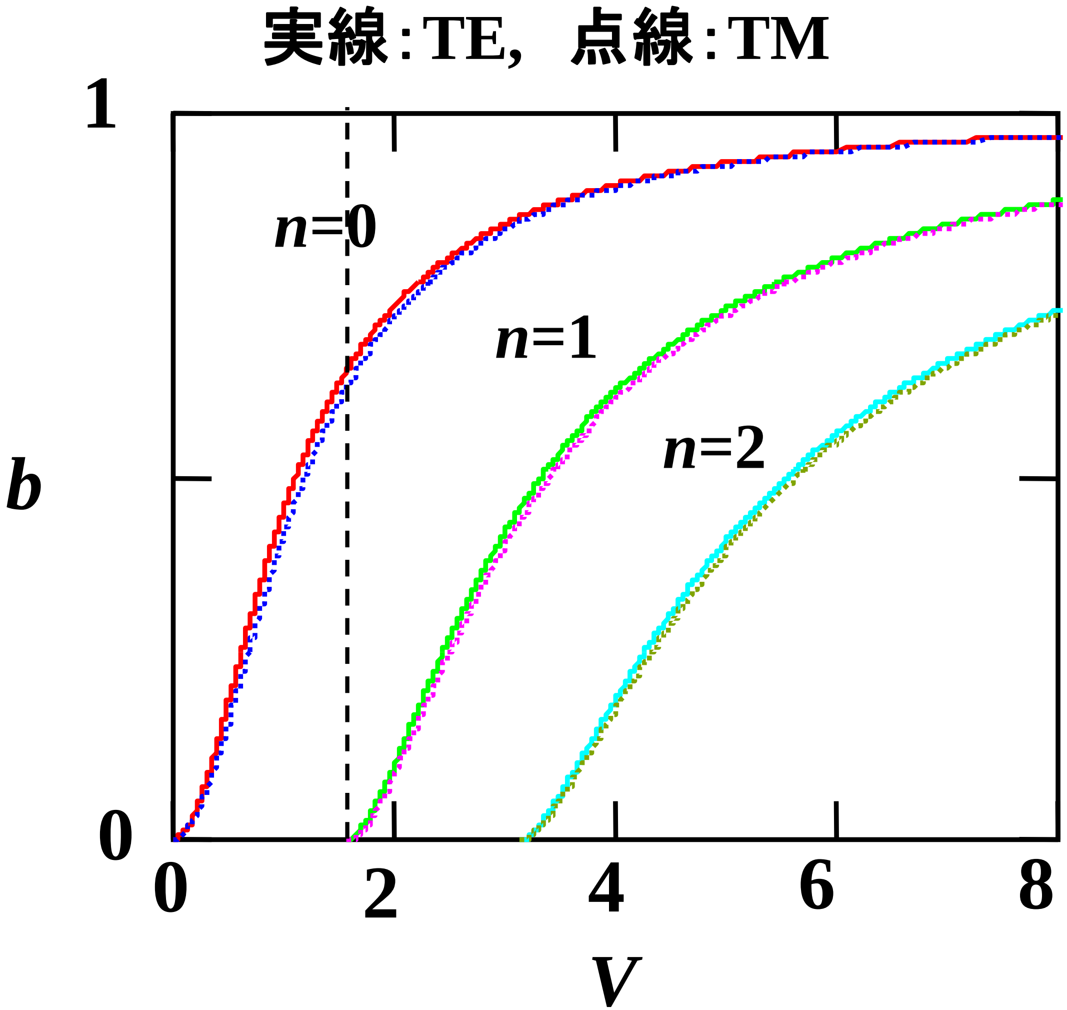
$$\gamma a = \kappa a \tan(\kappa a + \frac{n\pi}{2}) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$(\kappa a)^2 + (\gamma a)^2 = (V)^2$$ の交点が解



固有値方程式の数値解析結果

n_1=1.63, n_2=1.45, Δ=0.104の条件の解析結果



●解析方法:
式(6.43), (6.44)をbを
パラメータにVを求め、
b軸-V軸を入れ替える。

●ある構造が与えられると
Vが決まる
→ 横モードごとのbが求まる

単一（シングル）モードー条件

n=1, b=0のときのVを求めると、固有値方程式より、

$$V = \frac{\pi}{2}$$

解析のグラフより、$V < \frac{\pi}{2}$ の範囲ではn=0の解しかないことがわかる。

⇒ **単一（シングル）モード条件**

光ファイバ・光導波路・半導体レーザなど各種デバイスの設計で必須

モードの分類(1)

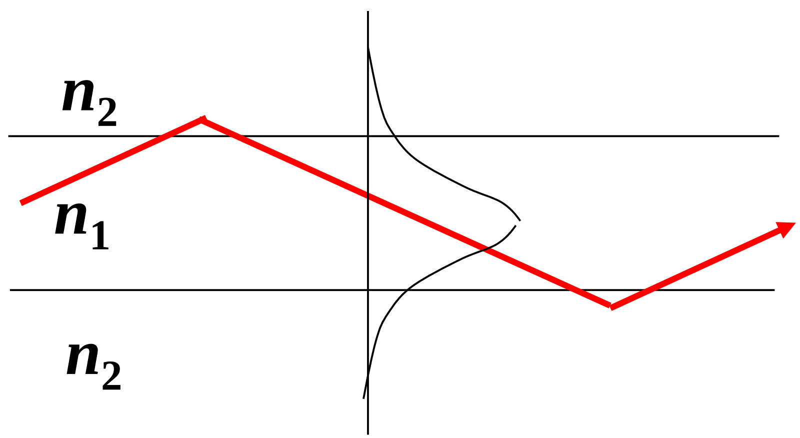
① 導波モード

式(6.13):

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}^2 E_y}{\mathrm{d}x^2} + (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_1{}^2 - \beta^2) E_y = 0 & \text{(コア内)} \\
\dfrac{\mathrm{d}^2 E_y}{\mathrm{d}x^2} + (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_2{}^2 - \beta^2) E_y = 0 & \text{(クラッド内)}
\end{cases}
$$

において $k_0 n_2 \le \beta \le k_0 n_1$ の関係を仮定していた。

⇒ 式(6.43), (6.44)で決まる離散的な導波モード



モードの分類(2)

② 放射モード

$\beta \leq k_0 n_1, \quad \beta \leq k_0 n_2$ の場合、コア内・クラッド内ともに振動解。

⇒ コア内に閉じ込められず全空間に広がるモード