基底と座標

以下, $K=\mathbb{C}$又は$\mathbb{R}$, V を K 上のベクトル空間とし, V のベクトルは $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 等で表し, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{x}$ 等は列ベクトルを表すことにする ($\boldsymbol{s},\boldsymbol{t},\boldsymbol{x},\ldots\in K^n$) . 又, 列ベクトルのときと同様に, V のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ の, 順序を問題にしない組を $\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ で表し, 順序を付けた組を行列と同じ記号を用いて

$$A=[\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]\ (=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n])$$

と表す. 又, これらを単に $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n$ とも表す. ($V=K^m$ のときは A は $m{\times}n$ K-行列とみなせる.)
V のベクトルの組 $A=[\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]$ と列ベクトル $\boldsymbol{x}={}^t[x_1\,x_2\,\cdots\,x_n]\in K^n$ との積を, 行列の積と同様

$$A\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{a}_1\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}:=\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{a}_nx_n=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_ix_i=\sum_{i=1}^nx_i\boldsymbol{a}_i$$

と定める. また, $A{=}[\boldsymbol{a}_1\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]$ と $n{\times}\ell$ K-行列 $H=[\boldsymbol{h}_1\,\cdots\,\boldsymbol{h}_\ell]=[h_{ij}]$ の積を次式で定める:

$$AH=A[\boldsymbol{h}_1\,\cdots\,\boldsymbol{h}_\ell]:=[A\boldsymbol{h}_1,\ldots,A\boldsymbol{h}_\ell]\qquad(A\boldsymbol{h}_j=\textstyle\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_ih_{ij})$$

ベクトルの組に対する 結合法則, 分配法則

上の A,H と $\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}\in K^n$, $x\in K$, $\boldsymbol{u}={}^t[u_1\cdots u_\ell]\in K^\ell$, $U=[\boldsymbol{u}_1\,\cdots\,\boldsymbol{u}_m]:\ell{\times}m$ K -行列に対し,
(0) $A\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$, (1) $A\boldsymbol{s}+A\boldsymbol{t}=A(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t})$, (2) $(A\boldsymbol{s})x=A(\boldsymbol{s}x)$, (3) $(AH)\boldsymbol{u}=A(H\boldsymbol{u})$, (4) $(AH)U=A(HU)$.

(∵) (0) は詳しくは $\boldsymbol{0}_n={}^t[0\cdots0]\in K^n$, V の零ベクトルを $\boldsymbol{0}_V$ と書くと $A\boldsymbol{0}_n:=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_i0\underset{\text{V2(v)}}{=}\sum_{i=1}^n\boldsymbol{0}_V=\boldsymbol{0}_V$.
(1): $A\boldsymbol{s}{+}A\boldsymbol{t}:=\displaystyle\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_is_i+\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_it_i\underset{\text{V3,}}{=}\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_i(s_i{+}t_i)=:A(\boldsymbol{s}{+}\boldsymbol{t})$. (2): $(A\boldsymbol{s})x:=(\displaystyle\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_is_i)x\underset{\text{V3,}}{=}\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_i(s_ix)=:A(\boldsymbol{s}x)$.
(3): $(AH)\boldsymbol{u}:=[A\boldsymbol{h}_1\,\cdots\,A\boldsymbol{h}_\ell]\boldsymbol{u}:=\sum_{j=1}^\ell(A\boldsymbol{h}_j)u_j:=\sum_{j=1}^\ell\sum_{i=1}^n(\boldsymbol{a}_ih_{ij})u_j\underset{\text{V3,}}{=}\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_i\big(\sum_{j=1}^\ell h_{ij}u_j\big)=:A(H\boldsymbol{u})$.
(4): $(AH)U=[(AH)\boldsymbol{u}_1\,\cdots\,(AH)\boldsymbol{u}_m]\underset{(3)}{=}[A(H\boldsymbol{u}_1)\,\cdots\,A(H\boldsymbol{u}_m)]=A(HU)$. □

[3.3] ((3) の系) V のベクトルの組 $B=[\boldsymbol{b}_1\,\cdots\,\boldsymbol{b}_\ell]$ の各 $\boldsymbol{b}_j$ が $A{=}[\boldsymbol{a}_1\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]$ の一次結合として $\boldsymbol{b}_j{=}A\boldsymbol{h}_j$ ($\boldsymbol{h}_j\in K^n$) と表され ($H=[\boldsymbol{h}_1\,\cdots\,\boldsymbol{h}_\ell]$ とおくと $B=AH$), $\boldsymbol{c}\in V$ が B の一次結合として $\boldsymbol{c}=B\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x}\in K^\ell$) と表されるとする. このとき $\boldsymbol{c}$ は A の一次結合として $\boldsymbol{c}=A(H\boldsymbol{x})$ と表される. ($\boldsymbol{c}=B\boldsymbol{x}=(AH)\boldsymbol{x}=A(H\boldsymbol{x})$.)

この記号を用いると一般のベクトルの組 $A{=}[\boldsymbol{a}_1\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]$ でも一次独立や生成系であることは次の様に表せる:

[B1] $\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ は一次独立: $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

[B2] $\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ は V の生成系 ($V=\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\,,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\rangle$): $\boldsymbol{b}\in V\Rightarrow\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x}\in K^n$ がある.

[B] = [B1]+[B2] をみたすとき $A{=}[\boldsymbol{a}_1\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]$ は基底である.

注意 定義より一次独立な V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ は, それが生成する部分空間 $W=\langle\boldsymbol{a}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\rangle$ の基底になる. 従って, 一次独立なベクトルの組に関する命題は部分空間の基底に関する命題と考えられる.

基底の例 数ベクトル空間, 幾何ベクトル空間とその部分空間の基底は既に述べたがそれ以外には:
(1) n 次以下の K-係数多項式全体 $K[x]_n$ の基底として $\{1,x,\ldots,x^n\}$ が取れる. 実際, n 次多項式は $p(x)=a_01+\cdots+a_nx^n$ と一次結合で表され, $p{=}0$ は $p(x)$ が定数 0 に恒等的に等しい, 即ち全ての係数が 0 であることを意味する. 従って $\{1,x,\ldots,x^n\}$ は一次独立.
(2) $m{\times}n$ K-行列全体 $M_{m,n}(K)$ の基底: 各 p,q に対し, (p,q) 成分のみが 1 で他の成分が 0 の行列 $E_{pq}:=[\delta_{ip}\delta_{jq}]$ を**行列単位**という. これらの全体 $\{E_{pq}:1{\leqq}p{\leqq}m,\,1{\leqq}q{\leqq}n\}$ (mn 個) は $M_{m,n}(K)$ の基底になる. 実際, $A=[a_{ij}]$ は $A=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^na_{ij}E_{ij}$ と一次結合で表され, $\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^na_{ij}E_{ij}=O\Rightarrow$ 全ての $a_{ij}=0$, より一次独立になる.
基底の条件 [B] は次の [B3] と同値:

[B3] $\{\boldsymbol{a}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ が V の基底 $\iff$ V の各ベクトルは $\boldsymbol{a}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n$ の一次結合として一意的に表される.

各 $\boldsymbol{b}\in V$ が $A=[\boldsymbol{a}_1\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]$ の一次結合として一意的に表されるとは, ①: $\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{s}$ ($\boldsymbol{s}\in K^n$) と表せ, ②: $\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{t}$ ($\boldsymbol{t}\in K^n$) とも表せたとすると $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{t}$ が成り立つときを言う. ① は A が生成系であることを意味するので, 次を言えば良い.

[B3'] $\{\boldsymbol{a}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ が一次独立 $\iff$ $[A\boldsymbol{s}=A\boldsymbol{t}\implies\boldsymbol{s}=\boldsymbol{t}]$.

(∵) (⇒) ① − ② より $\boldsymbol{0}=A\boldsymbol{s}-A\boldsymbol{t}=A(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t})$. $A=[\boldsymbol{a}_1\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]$ が一次独立より $\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}$. よって $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{t}$.
(⇐) $A\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}$ とすると, ($\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}$ として) $A\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ と, 2 通りに表せるが, 一意性により $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}$. よって A は一次独立. □

[B4] ([B3' の系]) $A=[\boldsymbol{a}_1\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]$ が一次独立のとき, $n{\times}k$ K-行列 X,Y に対し $AX=AY\implies X=Y$.

(∵) $X=[\boldsymbol{x}_1\,\cdots\,\boldsymbol{x}_k],Y=[\boldsymbol{y}_1\,\cdots\,\boldsymbol{y}_k]$ と列分割すれば $AX=[A\boldsymbol{x}_1\,\cdots\,A\boldsymbol{x}_k]=AY=[A\boldsymbol{y}_1\,\cdots\,A\boldsymbol{y}_k]$ より $A\boldsymbol{x}_j=A\boldsymbol{y}_j$.
A が一次独立より $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{y}_i$ ($i=1,\ldots,n$) ([B3']). よって $X=Y$. □

V に生成系 $A=[\boldsymbol{a}_1\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]$ が与えられたとき, V のベクトルの組 $B=[\boldsymbol{b}_1\,\cdots\,\boldsymbol{b}_\ell]$ の各 $\boldsymbol{b}_j$ は $\boldsymbol{b}_j=A\boldsymbol{h}_j=\sum_{i=1}^\ell\boldsymbol{a}_ih_{ij}$ と表せるので, $H:=[h_{ij}]$ とおけば B は $B=AH$ と表せ, A が基底であれば [B4] より H は一意的に定まる:

$$B=[\boldsymbol{b}_1\,\cdots\,\boldsymbol{b}_\ell]=A[\boldsymbol{h}_1\cdots\boldsymbol{h}_\ell]=AH,\qquad\boldsymbol{b}_j=A\boldsymbol{h}_j=\sum_{i=1}^\ell\boldsymbol{a}_ih_{ij}\quad(j=1,\ldots,\ell).$$

定理 (4.3)[3.9]'(生成系と一次独立なベクトルの個数) ベクトル空間 V が n 個のベクトルからなる生成系 $A=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]$ を持つとき ($V=\langle\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n\rangle$), V の ℓ 個のベクトルの組 $B=[\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_\ell]$ について,

(1) $\ell>n$ ならば $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_k$ は一次従属. (1)* ((1) の対偶) $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_\ell$ が一次独立ならば $\ell\leqq n$.

($\because$ (1)) B は $n\times\ell$ K-行列 H を用いて $B=AH$ と表せる. $n<\ell$ なら $\operatorname{rank}H\leqq n<\ell$ より方程式 $H\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は自明でない解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}\neq\boldsymbol{0}$, $H\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}$ を持つ. このとき $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $B\boldsymbol{t}=AH\boldsymbol{t}=A\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ より自明でない解 $\boldsymbol{t}$ をもつ. よって B は一次従属.

定理 (4.7)[3.9](基底をなすベクトルの個数の不変性) $A=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]$, $B=[\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_\ell]$ が共に V の基底ならば $n=\ell$. (即ち, 基底をなすベクトルの個数 (次元という) は基底の取り方によらずに定まる.)

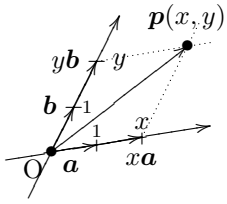
($\because$) (4.3) (1)*: A が生成系, B が一次独立より $\ell\leqq n$. B が生成系, A が一次独立より $n\leqq\ell$. $\therefore$ $n=\ell$.

[次元] ベクトル空間 V が n 個のベクトルからなる基底をもつとき, この個数 n を V の **次元** (dimension) といい,

$\dim V$ より詳しくは $\dim_K V$ (つまり, $\dim_{\mathbb{R}} V$ 又は $\dim_{\mathbb{C}} V$)

と表す. $V=\{\boldsymbol{0}\}$ のときは基底はないので $\dim\{\boldsymbol{0}\}=0$ とする. 次元が有限のとき V は **有限次元**であるという.

[座標] V に順序付けられた基底 $A=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]$ が与えられれば, V のベクトル $\boldsymbol{b}$ は n 次元数ベクトル $\boldsymbol{x}={}^t[x_1\cdots x_n]\in K^n$ を用いて $\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{x}$ と一意的に表される. この数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{b}$ の, 基底 $A=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]$ に関する **座標**, 又は成分表示といい, 各 x_i を第 i 成分 (座標平面上のベクトルのときは x 成分, y 成分) という.



例 (幾何ベクトルの座標) 平面ベクトル $\boldsymbol{p}$ は基底 $[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}]$ を用いて $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ と一意的に表せるので, $\boldsymbol{p}$ の基底 $[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}]$ に関する座標は ${}^t[x,y]$. この対応 $\boldsymbol{p}\to{}^t[x,y]$ は平面上の座標系を定めるが, 一般には直交していないので斜交座標系といわれる. 空間ベクトルでも同様.

- 一般に, n **次元ベクトル空間は基底を定め, 座標を考える事により数空間** K^n **と見なせる.**

[基底の変換行列] $A=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]$, $B=[\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_n]$ をともに V の基底とすると $B=AP$, $A=BQ$, (P,Q は n 次正方 K-行列) と表される. $AE=A=BQ=(AP)Q=A(PQ)$ で A が一次独立なので, [B4] より $E=PQ$. $\therefore$ P は正則で $Q=P^{-1}$. この P を **基底** A から **基底** B への**変換行列**, **基底変換の行列**, または基底の取替え $A\to B$ の行列という. B から A への変換行列は $Q=P^{-1}$. P の成分 p_{ij} は次式から求められる:

$$[\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_n]=B=AP=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n][p_{ij}],\quad \boldsymbol{b}_j=\textstyle\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_ip_{ij}=\boldsymbol{a}_1p_{1j}+\cdots+\boldsymbol{a}_np_{nj}$$

A,B,C が基底, $B=AP$, $C=BQ$ なら $C=A(PQ)$ より A から C への変換行列は PQ.

[座標変換] A,B が V の基底なら, $\boldsymbol{c}\in V$ は $\boldsymbol{c}=A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{c}=B\boldsymbol{y}$ と表されるが, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}=B\boldsymbol{y}=AP\boldsymbol{y}$ と [B3] より

$$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}.\qquad(\therefore\ \boldsymbol{y}=P^{-1}\boldsymbol{x})$$

即ち, 基底変換の行列を用いて座標変換の式が得られる.

- A を基底, P を正則行列とし, $B=AP$ とするとき, $\boldsymbol{c}=B\boldsymbol{y}$ となる $\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{y}=P^{-1}\boldsymbol{x}$ により一意的に定まるので [B3] より B は基底になる.

[例題](基底変換 1) $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組 $A=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]$, $B=[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3]$ を次の様に定める：

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix}.$$

(1) A, B はともに $\mathbb{R}^3$ の基底になることを示せ. (2) $\boldsymbol{b}_1$ を $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表せ.

(3) A から B への基底の変換行列 P ($B=AP$) を求めよ.

解: (1) $\det A=1$, $\det B=-1$ より A,B は正則. よって A,B は基底になる.

(2), (3) を同時に求める. A が正則行列なので $P=A^{-1}B$ より, $[A,\,B]$ を行変形して階段行列を作れば P が求まる.

$$[A,\,B]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&2&1&3\\2&-1&1&1&1&2\\0&2&1&3&2&4\end{array}\right]\mapsto[E,\,A^{-1}B]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&-1&-1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&3&0&4\end{array}\right]\quad\therefore\ P=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\0&1&0\\3&0&4\end{bmatrix}$$

P の第 1 列 $A^{-1}\boldsymbol{b}_1={}^t[-1,0,3]$ が $\boldsymbol{b}_1$ の座標になる. $\because$ これが $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$ の唯一の解. $\therefore$ $\boldsymbol{b}_1=A(A^{-1}\boldsymbol{b}_1)=-1\boldsymbol{a}_1+0\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3$.

[例題](基底変換 2) 2 次以下の実係数多項式 $p(x)=ax^2+bx+c$ 全体のつくるベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_2$ において, $p_0(x)=-1$, $p_1(x)=x+3$, $p_2(x)=(x+1)^2$ とするとき,

(1) $[p_0(x),\,p_1(x),\,p_2(x)]$ は $\mathbb{R}[x]_2$ の基底になることを示せ.

(2) 基底 $[1,\,x,\,x^2]$ から $[p_0(x),\,p_1(x),\,p_2(x)]$ への変換行列を求めよ.

解: 変換行列を求め，それが正則であることを示す.

$$\begin{bmatrix}p_0(x)\\p_1(x)\\p_2(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3+x\\1+2x+x^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\3&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\x^2\end{bmatrix}.\ \text{転置して，}\ [p_0(x),\,p_1(x),\,p_2(x)]=[1,\,x,\,x^2]\begin{bmatrix}-1&3&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$P=\begin{bmatrix}-1&3&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ は $\det P=-1$ より正則. $\therefore$ $[p_0(x),\,p_1(x),\,p_2(x)]$ は $\mathbb{R}[x]_2$ の基底になり, P は変換行列.