ベクトル空間の例

数ベクトル空間 K^n は K 上の, 幾何ベクトル空間は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になるが, その他にも次の様な例がある. なお, $\boldsymbol{a}$ の逆ベクトル $-\boldsymbol{a}$ は $(-1)\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a}$ の (-1) 倍) で (零ベクトル $\mathbf{0}$ は $0\boldsymbol{a}$ で) 与えられる.

(1) **$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ 行列全体のつくるベクトル空間**　$m\times n$ 行列全体の集合 $M_{m,n}(\mathbb{C})$, $m\times n$ 実行列全体の集合 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ (纏めて $M_{m,n}(K)$) は 行列の和, スカラー倍, 零ベクトルは零行列 O として K 上のベクトル空間になる. 即ち, $M_{m,n}(\mathbb{C})$ は複素ベクトル空間, $M_{m,n}(\mathbb{R})$ は実ベクトル空間である. (複素) 行列は $\mathbb{C}$-行列, 実行列は $\mathbb{R}$-行列と表し, 纏めて K-行列と表す. 特に n 次正方行列全体の空間を ($M_{n,n}(K)$ の代わりに) $M_n(K)$ と表す.

(2) **零ベクトル空間 $\{\mathbf{0}\}$**: 唯 1 つの元 $\mathbf{0}$ からなる集合 $\{\mathbf{0}\}$ に, $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $s\mathbf{0}=\mathbf{0}s=\mathbf{0}$ $(s\in K)$ と定めるとベクトル空間になる. $\{\mathbf{0}\}$ をすべてのベクトル空間の部分空間と考える.

(3) **無限次元数空間 (数列空間)** K^∞: 無限項の数ベクトル $\boldsymbol{x}={}^t[x_1,x_2,\ldots]$ 全体の集合 K^∞ も項ごとの和, 定数倍により K 上のベクトル空間になる. 数列 $\{x_n\}$ は数ベクトル $\boldsymbol{x}={}^t[x_1,x_2,\ldots]$ と見なされる.

(4) **多項式の空間** (i) K 係数一変数多項式全体の集合 $K[x]$: ($\mathbb{R}[x]$ は実係数, $\mathbb{C}[x]$ は複素係数の多項式全体) 多項式の和, 定数倍（各係数の和, 定数倍) でベクトル空間になる. 定数や単項式も多項式とする. 零ベクトルは定数 0. $f(x)$ と $g(x)$ が「多項式として等しい」は次数が同じで (展開形での) 全ての係数が等しいことを意味し, $f=g$, $f(x)\equiv g(x)$ (恒等的に等しい), $f(x)=g(x)$ 等と表す. 従って, $1\ (=x^0)$, x, $x^2,\ldots,x^n$ は**一次独立**である.
(注) $f(x)=g(x)$ を方程式と誤解しない様に! 誤解を避けたい場合は $f=g$, $f(x)\equiv g(x)$ を用いる.
(ii) K 係数多変数多項式全体の空間 $K[x_1,\ldots,x_n]$ も $K[x]$ と同様に K 上のベクトル空間になる.

部分空間の例 (部分空間もまたベクトル空間になる.)　これまでに挙げた部分空間の例以外に次の様な例がある.
n 次以下の多項式の空間　$K[x]_n:=\{a_0+\cdots+a_nx^n\,|\,a_0,\ldots,a_n\in K\}$ は $K[x]$ の部分空間になる.
n 次実対称行列全体の空間　$H_{\mathbb{R}}(n):=\{A\in M_n(\mathbb{R})\,|\,{}^tA{=}A\}$ は $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間になる. (**問** これらを確かめよ.)

[ベクトル空間の発展的例]　(ここでは詳しくは扱わないが, 一般には無限次元になる.)
• 以下 X を集合 (例えば $\mathbb{R},\mathbb{R}^2,\ldots$ 等) とし, V を K 上のベクトル空間, $s\in K$ とする. X 上の関数や写像 $f,g:X\to K$, $f,g:X\to V$ の和 $f{+}g$, s 倍 sf は 値での和, s 倍と定められる:

$$\text{各 } a\in X \text{ について}\quad (f{+}g)(a):=f(a)+g(a),\quad (sf)(a):=s(f(a))\qquad \text{(通常の関数の和, 定数倍)}$$

(例えば $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2{+}3x{+}1$ のとき, $(f{+}g)(x):=f(x){+}g(x)=\sin x{+}x^2{+}3x{+}1$, $(sf)(x):=s\sin x$.)
f と g が関数や写像として**等しい** ($f=g$) とは, 「全ての $a\in X$ について $f(a)=g(a)$」のときと定められる.
この時, $f(x)$ と $g(x)$ は**恒等的に等しい**ともいい, $f(x)\equiv g(x)$ とも表す (多項式と同じで, $f(x)=g(x)$ も用いる).
定数やベクトルも関数や写像とみなされる. $c\in K$ は $c(x)\equiv c$ なる関数, $\boldsymbol{c}\in V$ は $\boldsymbol{c}(x)\equiv\boldsymbol{c}$ なる写像とみなす.)
特に $0\in K$, $\mathbf{0}\in V$ は零ベクトルの役割をはたす. ($\because$ $(f{+}0)(a)=f(a)+0=f(a)$ $(a\in X)$ より $f{+}0=f$.)
また, $(-f)(x):=-f(x)$. このとき,

(1) **関数空間**: 集合 X 上の K-値関数全体の集合 $F(X,K)$,
(2) **写像空間**: 集合 X からベクトル空間 V への写像全体 $F(X,V)$ は K 上のベクトル空間になる.
($\because$)(交換法則) $f,g:X\to V$ と各 $a\in X$ に対し, $f(a)$, $g(a)$ は V のベクトルだから $f(a)+g(a)=g(a)+f(a)$ を満たす. $\therefore$ $(f{+}g)(a)=f(a)+g(a)=g(a)+f(a)=(g{+}f)(a)$ が全ての $a\in X$ について成り立つので $f+g=g+f$. 他も同様.
(注) $X=\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$ のときは f は $f(x,y)$, $f(x,y,z)$ と表される. $K=\mathbb{C}$ のとき $f:X\to\mathbb{C}$ は実数値関数 g,h を用いて $f(x)=g(x)+i\,h(x)$ と表される. 例えば $e^{ix}=\cos x+i\sin x$. 写像 $f:X\to V$ は, 例えば $V{=}\mathbb{R}^3$ のときは３つの関数の組 $f(x)={}^t[f_1(x),f_2(x),f_3(x)]$ で表され, ベクトル場といわれる.

[部分空間の例] $X=\mathbb{R}^n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ とする. 以下の (1,2,3,4) の例は微分積分学における定理を用いて示される.
(1) 数列空間 K^∞ の部分空間として, 収束数列全体. (収束数列の和・定数倍は収束する, による.)
(2) $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (実数値１変数関数全体) の部分空間として, 連続関数全体の空間 $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $C^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ も同様.
(3) r 回連続微分可能な関数全体 $C^r(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $C^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ も同様に $F(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ の部分空間になる.
((2) は連続関数の和・定数倍は連続, による. (3) は (2) と, 可微分関数の和・定数倍は可微分で,
$(f{+}g)'(x)=f'(x){+}g'(x)$, $(sf)'(x)=s{\cdot}f'(x)$ (**微分の線型性**という) による. 偏微分も同様.)
(4) 線型同次常微分方程式の解空間: y を x の関数とし, その n 階導関数を $y^{(n)}$ とするとき, 方程式

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}{+}\cdots{+}a_1y'{+}a_0y=0\quad (y'{=}y^{(1)},y{=}y^{(0)})\quad (\text{各 } y^{(i)} \text{ について一次で定数項がない})$$

の形の方程式を n 階同次線型常微分方程式という. この解集合も $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解空間や以下の線型同次漸化式

の解空間と同様に部分空間になることが分かる．微分方程式論 (微積分の教科書参照）により，この解は初期値 $y(0),\cdots,y^{(n-1)}(0)$ により定まり，n 個の関数からなる基本解をもち, 解空間の次元が n になることが知られている.

(5) 数列空間 K^∞ の部分空間として, 同次線形漸化式 $(*)$ $x_{n+k}+a_{k-1}x_{n+k-1}+\cdots+a_0x_n=0$ $(a_i{\in}K)$ の解空間.

$(\because)$ $\{x_n\},\{y_n\}$ を $(*)$ の解 $(\sum_{i=0}^{k}a_ix_{n+i}=0,\ \sum_{i=0}^{k}a_iy_{n+i}=0\ (a_k{:=}1,n{=}1,2,\ldots))$ $s,t{\in}K$ とすると, $s\{x_n\}{+}t\{y_n\}=\{sx_n{+}ty_n\}$ は, $\sum_{i=0}^{k}a_i(sx_{n+i}{+}ty_n)=s(\sum_{i=0}^{k}a_ix_{n+i})+t(\sum_{i=0}^{k}a_iy_{n+i})=s{\cdot}0{+}t{\cdot}0=0$ より $(*)$ の解になるので [S3] をみたし, 部分空間になる.

この数列は最初の k 項 $b_1,\cdots,b_k$ により定められ, 解空間の次元は k になることが分かる.

補足: 体とベクトル空間の公理から導かれる性質

体は $\mathbb{C}$,$\mathbb{R}$ 以外にも多数あり, ベクトル空間の例も多数ある．これらに適用する為, ここでは公理から導かれる基本性質を述べる.

体の定義

一般に, 集合 K の各元 $x,y\in K$ に和 $x+y\in K$ と積 $x{\cdot}y\in K$ が定められ, 次の性質 **[F]**(**体の公理**という) をみたすとき K を**体** (詳しくは可換体) という．(これは $K=\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}$ に共通する四則演算の基本的性質である.) $x,y,z\in K$ に対し

[F1] 和 $x+y$ について: (i) **結合法則**: $(x+y)+z=x+(y+z)$, (ii) **交換法則**: $x+y=y+x$,
(iii) **零の存在**: 全 $x\in K$ に対し $x+0=x=0+x$ となる $0\in K$ が (唯 1 つ) ある,
(iv) $-x$ **の存在**: 各 $x\in K$ に対し $x+y=0=y+x$ となる $y\in K$ が (唯 1 つ) ある,
(この y は $-x$ と表される．$\therefore$ $x+(-x)=0=-x+x$．差 $x-z$ は $x+(-z)$ と定められている．)

[F2] 積 $x\cdot y$ について: (i) **結合法則**: $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$. (ii) **交換法則**: $x\cdot y=y\cdot x$,
(iii) 1 **の存在**: 全 $x\in K$ に対し, $x\cdot 1=x=1\cdot x$ となる $1\in K$ $(1{\neq}0)$ が (唯 1 つ) ある,
(iv) **逆数** x^{-1} **の存在**: 各 $x\in K$, $x{\neq}0$ に対し, $x\cdot y=1=y\cdot x$ となる $y\in K$ が (唯 1 つ) ある,
(この y は x^{-1} と表され, x の逆数といわれる．$\therefore$ $x\cdot x^{-1}=1=x^{-1}\cdot x$．商 x/z は $x\cdot z^{-1}$ と定められている.)

[F3] **分配法則** (i) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$, (ii) $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$. (通常, 積 $x\cdot y$ は xy と表される.)

ベクトル空間の定義

一般に, 集合 V の各元 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$ と 体 K の各元 $s\in K$ に対し, 和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in V$ とスカラー倍 $s\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}s\in V$ が定められていて, 次の性質 **[V]**(**ベクトル空間の公理**という) をみたすとき, V を K 上の**ベクトル空間**, 又は**線型空間**という.
$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in V$, $s,t\in K$ とするとき

[V1] 和について: (i)(結合法則) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, (ii) (交換法則) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,
(iii) (零ベクトルの存在) 全 $\boldsymbol{a}\in V$ に対し $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}\ =\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}$ となる $\boldsymbol{0}\in V$ が (唯 1 つ) ある,
(iv) (逆ベクトルの存在) 各 $\boldsymbol{a}\in V$ に対し $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\ =\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ となる $\boldsymbol{b}\in V$ が (唯 1 つ) ある.
この $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**といい, $-\boldsymbol{a}$ と表す. $(\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.)$ 差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ と定める.

[V2] スカラー倍について: $\boldsymbol{a}s=s\boldsymbol{a}$ であり,
(i) (結合法則) $(st)\boldsymbol{a}=s(t\boldsymbol{a})$, (ii) (単位性) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,

[V3] (i) (分配法則 1) $s(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=s\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}$, (ii) (分配法則 2) $(s+t)\boldsymbol{a}=s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{a}$.

注 1 交換法則があるので F1,F2,V1,V2 の (iii), (iv) の等号は一方が成り立てば他方も出る.
K 上のベクトル空間 V の元を**ベクトル**という．このとき体 K の元を**スカラー**という.

ここでは, 体での和・積が数の和・積と同様に, ベクトルの和・スカラー倍が数ベクトルと同様に計算出来ることをみる．F1,2,3 と V1,2,3 はそれぞれ対応しているのでここではベクトルの演算を中心に述べる.

• F1, F2,V1 の (iii),(iv) $0,1,x^{-1},\boldsymbol{0},-\boldsymbol{a}$ の一意性の証明: これらは逆行列の一意性と同様に証明できる．(V1(iii) の証明) V1(iii) をみたす $\boldsymbol{0}'\in V$ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}'=\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}'+\boldsymbol{a})$ があるとする．このとき $\boldsymbol{a}{:=}\boldsymbol{0}$ とおくと $\boldsymbol{0}{=}\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}'$. 一方, V1(iii) で $\boldsymbol{a}{:=}\boldsymbol{0}'$ とおくと $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}'{=}\boldsymbol{0}'$. 合わせて $\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}'=\boldsymbol{0}'$. よって V1(iii) をみたす $\boldsymbol{0}$ は唯一つしかない．0,1 も同様.
$(-\boldsymbol{a}\ (,x^{-1})$ の一意性) V1(iv) をみたす $\boldsymbol{c}$ $(\boldsymbol{c}{+}\boldsymbol{a}{=}\boldsymbol{0})$ があれば $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}{+}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{c}{+}(\boldsymbol{a}{+}\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{c}{+}\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}{+}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$.

• 結合法則により演算の順序によらず演算の結果が定まるので, $\boldsymbol{a}{+}\boldsymbol{b}{+}\boldsymbol{c}$, $st\boldsymbol{a}$ の様に括弧は省略される．数学的帰納法により [V] の関係式は多項の関係式に拡張され, 交換法則により和, スカラー倍の順序は変えてよい．例えば [V1(iii)] $\boldsymbol{a}{+}\boldsymbol{0}{+}\cdots{+}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$,

[V3']: $\Big(\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_j\Big)s=\Big(\sum_{j=1}^{n-1}\boldsymbol{a}_j{+}\boldsymbol{a}_n\Big)s=\Big(\sum_{j=1}^{n-1}\boldsymbol{a}_j\Big)s+\boldsymbol{a}_ns=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_js$, $\boldsymbol{a}\Big(\sum_{i=1}^{m}s_i\Big)=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{a}s_i$, $\Big(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}s_j\Big)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{a}_is_j$.

• (0 倍等) **[V2(iii)]** $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, $t\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$. **[V4]** $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$. (**[F2(iv)]** $0x=0$.)

$(\because)$ [V2(iii)](F2(iv) も同様.) $0\boldsymbol{a}=(0+0)\boldsymbol{a}\underset{\text{V3(ii)}}{=}0\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{a}$. 左右両辺に $-0\boldsymbol{a}$ を加えて, $0\boldsymbol{a}+(-0\boldsymbol{a})=0\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{a}+(-0\boldsymbol{a})$.
左辺 $=0\boldsymbol{a}+(-0\boldsymbol{a})\underset{\text{V1(iv)}}{=}\boldsymbol{0}$, 右辺 $=0\boldsymbol{a}+(0\boldsymbol{a}+(-0\boldsymbol{a}))\underset{\text{V1(iv)}}{=}0\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}\underset{\text{V1(iii)}}{=}0\boldsymbol{a}$. $\therefore$ $\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{a}$. $t\boldsymbol{0}{=}\boldsymbol{0}$ も $\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}$ より同様.
[V4]: $\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{a}\underset{\text{V2(ii)}}{=}1\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{a}\underset{\text{V3(ii)}}{=}(1{+}(-1))\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{a}\underset{\text{V2(v)}}{=}\boldsymbol{0}$ より $(-1)\boldsymbol{a}$ が [V1(iv)] をみたすので $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

従って**ベクトルの演算は数ベクトルと同様に, 体での演算は数と同様に計算してよい.**

逆ベクトルは [V4] により $(-1)\boldsymbol{a}$, 零ベクトルは [V2(iii)] により $0\boldsymbol{a}$ と定めればよい.