2016 年 1 月 8 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 6

お知らせ

- 次回は 1 月 14 日（木）です．(12 日（火）は月曜日の時間割，15 日（金）はセンター試験準備).
- 1 月 22 日（金）は「ジェネリック・スキル」測定試験「PROG」を受験していただきます．教育改革に伴う学生のジェネリック・スキルの現況調査が目的です．ご協力ください．通常の時間に通常の教室までおいでください．詳細は `http://www2.gakumu.titech.ac.jp/kyoumu/kaikaku/doc/2015prog.pdf`
- 1 月 26 日（火）に中間試験を行います．14 日に予告しますので，お誘い合わせの上おいでください．

前回までの訂正

- 講義資料 4, 下から 9 行目：$\frac{m}{n} = e = \frac{1}{+}\frac{1}{2!} + \dots \Rightarrow \frac{m}{n} = e = 1 + \frac{1}{2!} + \dots$
- 講義ノート 27 ページ，下から 7 行目：テイラーの定理?? ⇒ テイラーの定理 1.19
- 講義ノート 29 ページ，下から 5 行目：いいかげん ⇒ いい加減
- 講義ノート 33 ページ，(3.4) 式：$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + df(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + {}^t\boldsymbol{h}\,\mathrm{Hess}\, f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + R_3(\boldsymbol{h}) \Rightarrow$
$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + df(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + \frac{1}{2}{}^t\boldsymbol{h}\,\mathrm{Hess}\, f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + R_3(\boldsymbol{h}),$$
- 講義資料 5 にて訂正した部分の訂正を再度された方がいらっしゃいます．講義資料には目を通してくださいね．
- **おねがい：**場所が特定しにくい誤りの指摘が多く見られます．講義資料での記述を見て真似をしてください．

授業に関する御意見

- 火曜日なのに提出用紙があって意外でした． **山田のコメント：** 今週はイレギュラーなくみあわせだということを，年末の授業で言ったはず．講義資料 4 にも書いてありますよね．ひょっとして聞いていなかった？ 欠席した？ 欠席してもよいが，授業時間に伝えたことは伝わっていると見なす，と講義概要に書いてありますよね．
- 微積分の話の中に行列が出てくると，一般化できてるんだなという感じがしてくる． **山田のコメント：** そうなの？
- むずいです． **山田のコメント：** よかった．大学まできて簡単なことばかりをやるんじゃつまんないよね．
- 些細なことですみませんが，b と $\boldsymbol{b}$ (山田注：筆記体のビー) が混ざっていました (一瞬使い分けかなと思ったのですが，僕にはわからなかったです.) **山田のコメント：** Sorry．使い分けていません．
- あけましておめでとうございます．今年もよろしくおねがいします．テストは簡単にして下さいお願いします．
  山田のコメント： おめでとうございます/こちらこそ/なんで？
- あけおめ **山田のコメント：** ことよろ

質問と回答

質問： $f(x) = \begin{cases} |x| & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$ は $x = +0$ で極小値 $+0$ をとるということはできませんか?

お答え： 極小値の定義はどうなっていましたか? その定義に合致していますか?

質問： 2 変数関数において，たとえば y を固定したときのグラフが（図省略，$x = \alpha$ で極大値をとるような絵が描いてある）のようになったとして，この $x = \alpha$ での値のことを極大と呼んでいいのですか? **お答え：**極値の定義に合致していますか? 確認してください．ちなみに，一変数関数 $f(x, k)$ は $x = \alpha$ で極値をとりますね．

質問： 2 変数関数 $f(x, y)$ を偏微分して出た $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ が $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ のとき，この点が必ずしも極値とならないため $\varphi(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ で極値とそれ以外を判別するのでしょうか． **お答え：**そう．

質問： 講義ノート P 33 の事実 3.14 の後半 2 つは 2 次形式の性質からわかるとありましたが，よく分かりませんでした． **お答え：**そうですか (としか言いようがないですね)．正確には「後にのべる」2 次形式の性質．したがって，これからあと約 1 ページ半を読んで下さい．そのうえで，どのへんが分からないのかを言葉にしてみましょう．

質問： 定理 3.12 に関して「$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ かつ $Q(h, k)$（原文ママ：$Q(h, k) > 0$ などのことか）for any $(h, k) \neq (0, 0)$ ならば...」という条件がありました．これらはそこで初めて課せられる条件なのでしょうか．テイラーの定理を考え始めた時点で，実は既にあった条件をあらためて確認しているということに過ぎないのでしょうか． **お答え：**ご質問の意味を図りかねますが，テイラーの定理自体は $(h, k) = (0, 0)$ の場合も含みますよね．

質問： 授業後半で Fact Q 正値 Q 負値 Q 不定値と 3 つ挙げたところの Q 不定値で $AC-B^2<0$ となるのはなぜですか． **お答え：**意味がわかっていますか?「Q が不定値になるための必要十分条件は $AC-B^2<0$ である」.

質問： 定理 3.5 において，A, C の逆が成立しないことは反例を示せばよいことになった．だが B について，逆が成立することはどのように示せばよいのですか． **お答え：**B の逆は成立しません．

質問： 定理 3.5 の B や C が成り立つ理由の正確バージョンはいつやるのですか? **お答え：**B は A の対偶だから，A の理由（ちょっと正確バージョン）がそのまま理由になっています．C については 1 月 5 日にやりました．

質問： 定理 3.5 の B や C が成り立つ理由のいい加減バージョンでも証明として使えるのですか? **お答え：**いいえ．

質問： Taylor の定理の $n=1$ で，$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+R_2(h)$, $\lim_{h\to 0}\frac{R_2(h)}{h}=0$ が成り立ちますが，m (原文ママ：$f'(a)$ のことか) $\neq 0$ のとき，$R_2(h)$ の項は無視して近似していましたが，近似から (B) $f'(a)\neq 0 \Rightarrow f$ は a で極値をとらない，の理由が示されたという所が納得できないのですが．

お答え： だから「いい加減バージョン」．ただ,「イメージする」には便利ですね．

質問： 講義ノート 30 ページ，(3.2) の $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R_2(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ で，$\sqrt{\ }$ がついているのがなぜかわかりません．

お答え： 点 $(0,0)$ と (h,k) の距離，すなわち (a,b) と $(a+h,b+k)$ の距離．$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h,k)\text{ の 2 次式}}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$

質問： 講義ノート 29 ページの $R_3(h,k)$ とは具体的にはどのような形で表されるのですか．あと 2 変数関数のテイラーの定理の一般的な形を知りたいです．

お答え： 証明の中の $F(t)$ に 1 変数関数のテイラーの定理をきちんと適用すればわかる（ので実はすでに知っている）：
$R_3(h,k)=\frac{1}{6}\left(f_{xxx}(*)h^3+3f_{xxy}(*)h^2k+3f_{xyy}(*)hk^2+f_{yyy}(*)k^3\right)$, $(*)=(a+\theta h,b+\theta k)$ $(0<\theta<1)$.
2 変数の場合の一般形は

$$f(a+h,b+k)=\sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\frac{\partial^m f}{\partial x^l\partial y^{m-l}}(a,b)h^m k^{m-l}\right)+R_{n+1}(h,k),\qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R_{n+1}(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}^{\,n}}=0$$

$$\left(R_{n+1}(h,k)=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^l\partial y^{n+1-l}}(a+\theta h,b+\theta k)h^l k^{n+1-l},\qquad (0<\theta<1)\right)$$

質問： 2 変数のテイラーの定理で，$n=3$ としたときの剰余項についてですが，$(h,k)\to(0,0)$ のとき $\frac{R_4(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}^{3}}\to 0$ と書くのですか． **お答え：**書くのです．

質問： (h,k) の 2 次形式 $Q(h,k)$ を用いて極大値を判定するときに，$AC-B^2$ の他に A の値を考えていたが，これは A の代わりに C の正負が分かる場合はそれを用いていいのだろうか．

お答え： そのとおり．$AC-B^2>0$ のときは，A の符号と C の符号が一致します．実際，このときは $AC>B^2\geqq 0$.

質問： 按分とはどういう意味ですか． **お答え：**基準となる数量に比例した割合で物を割り振ること（広辞苑第 6 版）

質問： 2 次形式の一般形を求めるときに a_{ij} と a_{ji} が等しくなるように係数を按分するとありますがどうやるのですか?

お答え： 講義ノート 34 ページの φ に対して $\tilde{a}_{ij}:=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})$ とおくと $\varphi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_ix_j$, $\tilde{a}_{ij}=\tilde{a}_{ji}$.

質問： 対偶は元と常に等価ですか． **お答え：**はい（古典論理では）．

質問： 命題とその対偶が同値であることを証明することはできるのですか． **お答え：**「真偽が一致」します．証明は真理値表をつくる．ただし「$P\Rightarrow Q$」は「P でないまたは Q」のこととみなします．

質問： 極値の定義のときにでてくる ε は 0 に限りなく小さい ε で考えればうまく選べますか?

お答え： 「0 に限りなく小さい ε」って何ですか? 0.1 はそれを満たしていますか?

質問： log と ln は同じ意味として扱っていいのですか? たとえば $\log_{10}$ を log, $\log_e$ を ln と省略するといった決まりごとなどがあるのですか? **お答え：**前期に説明しませんでしたっけ．自然対数の表し方は log, ln の 2 つあるが，同じ文脈では混用しない．自然対数を ln で表すような文脈では log は常用対数を表すことが多い．

質問： 講議ノート（原文ママ） p 32 の補題 3.13 で，$A\neq 0$ かつ $C\neq 0$ のときはどう証明されるのですか?

お答え： 何度も指摘していますので，無視します．

質問： ヘッセ行列の意味がわかりません．. なんで "微積で" 行列が出現しているんですか． **お答え：**意味がわからなくても，定義は分かりますね．で，出現しちゃいけませんか? なんで科目ごとに仕切りをつけないといけないの?

質問： 先生は，叱られる $\Rightarrow$ 勉強する の関係はどんなでしたか? (1) 叱られなくても勉強する (2) 叱られたら勉強する (3) 叱られても勉強しない． **お答え：**叱られたら勉強しない，っていう選択肢はないの?

質問： なんで今日こんなに寒いんでしょうか? **お答え：**そんなに寒いですか?