今日の授業

- マッチング理論の主要な結果と現実のマッチング制度設計への応用について紹介する.

Alvin E. Roth　　Lloyd S. Shapley

The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 2012 was awarded jointly to Alvin E. Roth and Lloyd S. Shapley *"for the theory of stable allocations and the practice of market design"*

- ※シャープレイとロスは2012年のノーベル経済学賞受賞

結婚問題

- 複数の男性と複数の女性が存在する状況を考える.
- 各男性は女性と独身に対して順位をつけている.
- 各女性は男性と独身に対して順位をつけている.
- 同順位はないものとする.

結婚問題: 例

- 4人の男性(A, B, C, D)と3人の女性(1, 2, 3)が存在する状況を考える.

- 各人のもっている順位は以下の通り.

A: 2, 1, A, 3	1: A, B, D, C, 1
B: 1, 2, 3, B	2: C, B, D, A, 1
C: 1, 2, 3, C	3: B, C, D, A, 3
D: 2, 1, D, 3	

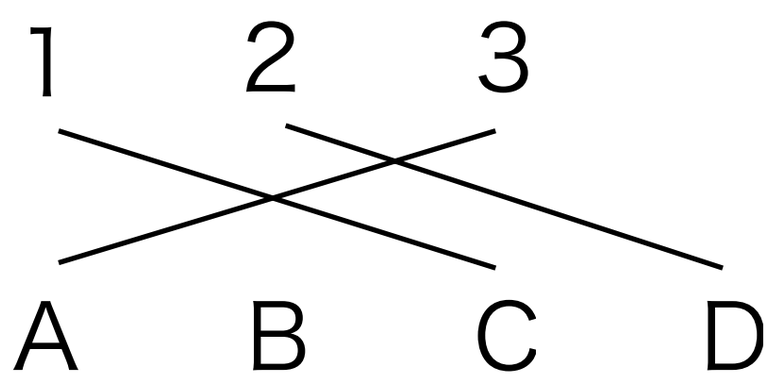
※1位, 2位, 3位, ・・・の順で並んでいる.

※独身より好ましい人のことを許容的な人と呼ぶ.

マッチング

- 各男性(女性)がどの女性(男性)と結婚しているのかを表すものをマッチングという.

マッチングの表し方:



問題: 各人が納得するような望ましいマッチングはあるのか？

安定マッチングの定義

- 個人合理性: 全ての人は, (i) 「許容的な人と結婚している」か (ii) 「独身」のいずれかである.
- 逸脱ペア: あるマッチングに対して, お互いに結婚してない男女(mとwとする)が以下の条件を満たすとき逸脱ペアという.

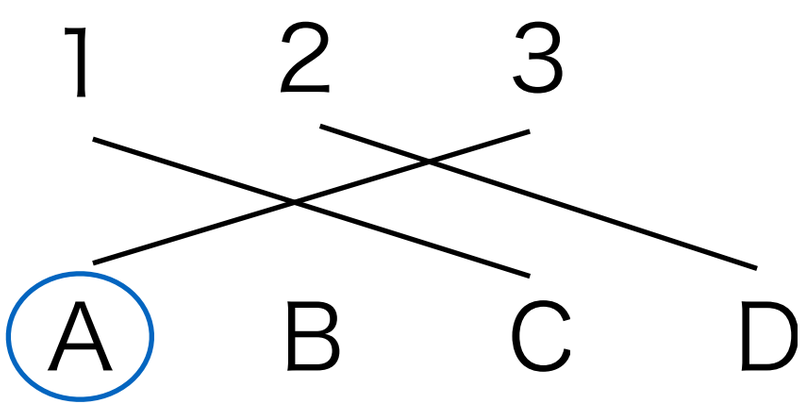
  mは結婚相手よりwの方が好ましい.
  wは結婚相手よりmの方が好ましい.

- 安定マッチング: 個人合理的かつ逸脱ペアが存在しないようなマッチング.

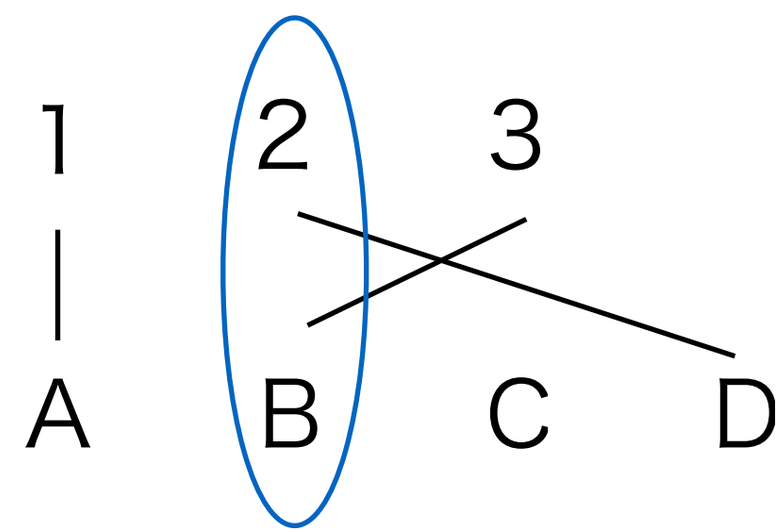
不安定なマッチングの例

A: 2, 1, A, 3
B: 1, 2, 3, B
C: 1, 2, 3, C
D: 2, 1, D, 3

1: A, B, D, C, 1
2: C, B, D, A, 2
3: B, C, D, A, 3



⇒個人合理的でない



⇒個人合理的だけど,
Bと２が逸脱ペア
(2とCも逸脱ペア)

男性告白型ゲール・シャープレイ(GS)アルゴリズム

ステップ1: 各男性は許容的な女性の中で最も好ましい女性に告白する. 各女性は告白してきた許容的な男性の中で最も好ましい男性をキープして, それ以外をリジェクトする.

ステップ２以降: 前のステップでリジェクトされた各男性は, これまでに自分をリジェクトしていない許容的な女性の中で、最も好ましい女性に告白する (既に全ての許容的な女性に告白している場合は独身確定となる.) 各女性は, 新たに告白してきた許容的な男性と現在キープしている男性の中で, 最も好ましい男性を新たにキープし, それ以外をリジェクトする.

※リジェクトされる男性がいないステップに終了.
※ 各女性は最終的にキープしている男性と結婚する.

男性告白型GSアルゴリズムの例

A: ~~2~~, 1, A, 3

B: ~~1~~, 2, 3, B

C: ~~1~~, 3, 2, C

D: ~~2~~, ~~1~~, D, 3

1: A, B, D, C, 1

2: C, B, D, A, 2

3: B, C, D, A, 3

	1	2	3	独身
ステップ1	B ~~C~~	~~A~~ D		
ステップ2	A ~~B~~	D	C	
ステップ3	A	B ~~D~~	C	
ステップ4	A ~~D~~	B	C	
ステップ5	A	B	C	D

安定マッチングの存在定理

※男性告白型GSアルゴリズムは有限回のステップで必ず終了して, マッチングを一つ求める.

定理1．男性告白型GSアルゴリズムが求めるマッチングは安定マッチングである. よって, 安定マッチングは必ず存在する.

定理１の証明

証明: 個人合理性は明らかに成り立つ. 逸脱ペアが存在しない事を以下で示す. 男性mにとって, GSアルゴリズムにおける相手よりも好ましい女性がいるとする (wで表す).
⇒ GSアルゴリズムのあるステップで男性mは女性wにリジェクトされている.
⇒ 女性wはこのステップですでに男性mより好ましい人をキープしている.
GSアルゴリズムの各ステップで各女性はより好ましい男性にきりかえていくので, 女性wにとって男性mよりGSアルゴリズムの相手の方が好ましい. よって, 逸脱ペアは存在しない.

補足

- 男性と女性の役割を入れ替えることで, 女性告白型GSアルゴリズムも定義でき, 安定マッチングをみつける.

- どちら側から告白するかで, これから見ていく安定マッチングに関する性質は大きく異なる注意.

- GSアルゴリズムはDeferred acceptanceアルゴリズムとも呼ばれる.

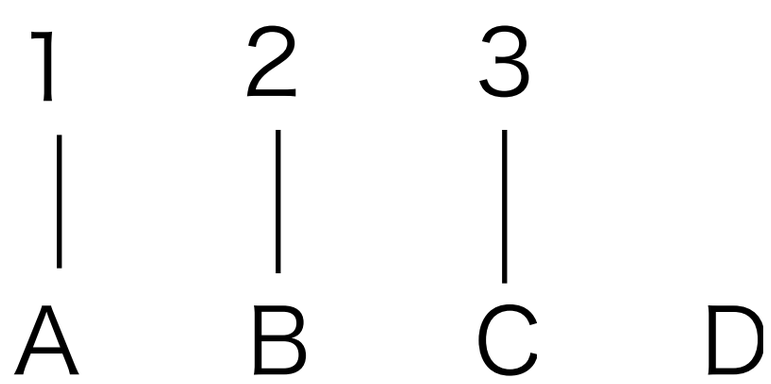
安定マッチングに関する性質: 男性最適性

※一般に安定マッチングは複数個存在する.

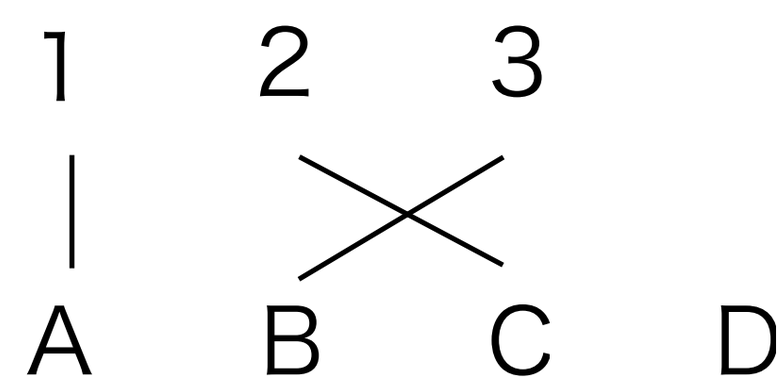
A: 2, 1, A, 3
B: 1, 2, 3, B
C: 1, 3, 2, C
D: 2, 1, D, 3

1: A, B, D, C, 1
2: C, B, D, A, 2
3: B, C, D, A, 3

男性告白型



女性告白型



全ての男性にとって女性告白型より男性告白型の方がよい！

安定マッチングに関する性質: 男性最適性

定理2. 男性告白型GSアルゴリズムによる安定マッチングは,
全ての男性にとって全ての安定マッチングの中で最も好ましい
マッチングである.

※証明は省略

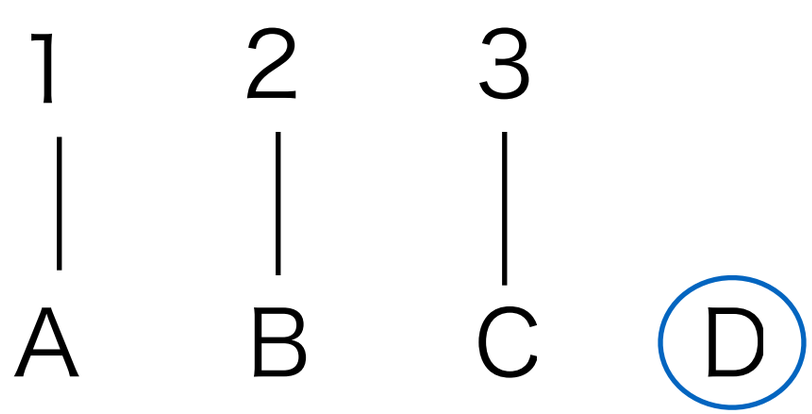
⇒告白する側が有利！

安定マッチングに関する性質: 独身定理

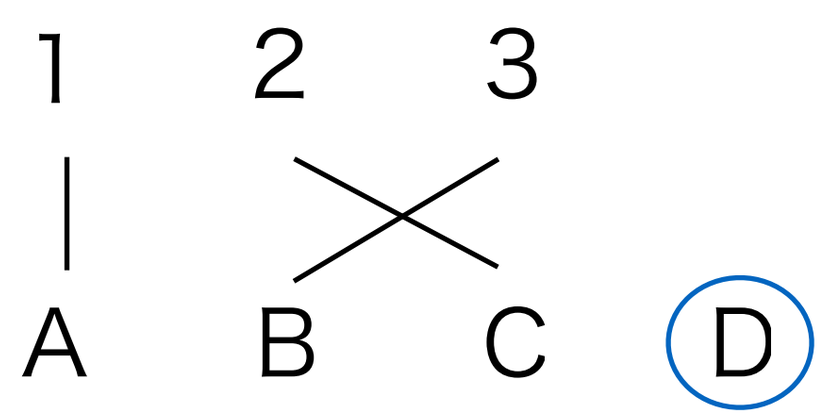
定理3. ある安定マッチングで独身の人は, 全ての安定マッチングで独身である.

※証明は省略

男性告白型



女性告白型



男性告白型GSアルゴリズムにおける戦略的行動

- 結婚仲介者が男女の結婚を, 男性告白型GSアルゴリズムで決める状況を考える.
- 結婚仲介者は, 男女のもつ順位を知らないので, 直接訪ねる必要がある.
- 各人は正直に自分のもつ順位を, 仲介者にいうのがよいであろうか？

男性告白型GSアルゴリズムにおける戦略的行動

さきほどの例で, 女性2だけがC, B, D, A, 2 (正直な順位)からC, 2(ウソの順位)に変更すると, BからCに相手が変わる.

A: 2, 1, A, 3
B: 1, 2, 3, B
C: 1, 3, 2, C
D: 2, 1, D, 3

1: A, B, D, C, 1
2: C, 2, ・・・
3: B, C, D, A, 3

	1	2	3	独身
1	B ~~C~~	~~A~~ ~~D~~		
2	A ~~B~~ ~~D~~		C	
3	A	~~B~~	C	D
4	A		B ~~C~~	D
5	A	C	B	D

⇒女性はウソをついて得できることがある.

男性告白型GSアルゴリズムにおける戦略的行動

定理4. 男性告白型GSアルゴリズムのもとで, 各男性は他の人達がどのような順位を表明しようとも, ウソの順位をいって結婚できる相手が, 正直な順位をいって結婚できる相手より好ましいことはない.

⇒男性はウソをついても得できない！

※ 「男性告白型GSアルゴリズムは男性にとって耐戦略性を満たす」と表現したりする.

より一般的なモデルへの拡張

- 男女の結婚問題は一対一マッチングである.
- 現実の問題は多対一マッチングが多い.

例: 学生と研究室
研修医と病院
労働者と職場

- 多対一マッチングの問題でも, これまでに紹介した結果が同様に成立することが知られている.

マッチング理論と制度設計: 研修医マッチング

- アルヴィン・ロスは研修医のインターン先の病院を決める際のマッチング制度について分析を行った.

1950年以前の制度⇒多くの人が参加しない.

1951年に導入された制度(NIMPアルゴリズム):
⇒多くの人が参加した.

なにが決め手なのか?

1950年以前: 安定マッチングを導出しない制度
NIMPアルゴリズム＝安定マッチングを見つけるアルゴリズム(病院告白型GSアルゴリズム)

マッチング理論と制度設計: 研修医マッチング

STABLE AND UNSTABLE CENTRALIZED MECHANISMS

Market	Stable/Based on DA Algorithm	Still in Use
Entry level medical markets:		
U.S. (NRMP)	yes/yes	yes
Edinburgh ('69)	yes/yes	yes
Cardiff	yes/yes	yes
Canada	yes/yes	yes
Cambridge	no	yes
London Hospital	no	yes
Birmingham	no	no
Edinburgh ('67)	no	no
Newcastle	no	no
Sheffeld	no	no
Other markets:		
Medical Specialties		
(approximately 30 markets)	yes/yes	yes
Canadian Lawyers (articling positions)		
Toronto	yes/yes	yes
Vancouver	yes/yes	no (abandoned in '96)
Calgary & Edmonton	yes/yes	yes
Dental Residencies (5 specialties,		
2 general programs)	yes/yes	yes
Osteopaths (< '94)	no	no
Osteopaths (> '94)	yes/yes	yes
Pharmacists	yes/yes	yes
Sororities	yes (at equilibrium)/no	yes

※Roth and Rothblum (1999)から抜粋

マッチング理論と制度設計: 学校選択制

- 学校選択問題: 公立学校に生徒を割り振る際に, 生徒の希望順位をもとに決める制度.

ボストンで以前使われていた制度 (ボストンメカニズム):

学生が戦略的に行動できる(ウソをついて得できる)ことが実際に問題となった.

↓

学生告白型GSアルゴリズムが使われるようになる.
(耐戦略性が決め手!)

マッチング理論と制度設計: 安定マッチングの問題点

- 研修医と病院のマッチング問題に独身定理を適用すると, 人気のない地方の病院などに人が集まらない事を意味する.

⇒医師の地域偏在の問題

- 日本の研修医のマッチング制度では, 研修医告白型GSアルゴリズムが使われているが, 医師の地域偏在が問題になっている.

- Kojima and Kamada (2015)はこの問題を解決するアプローチを提案している.

まとめ

- マッチング理論は現実のマッチング制度を設計するうえでの基礎となっている.
- より一般に, ゲーム理論を用いて, 現実の制度(オークションなど)を設計するような学問領域は, マーケットデザインとよばれ, 現在盛んに研究が行われている.

参考文献 1

- Fuhito, Kojima and Yuichiro, Kamada (2015), Efficient Matching under Distributional Constraints: Theory and Applications. American Economic Review, 105, 67-99.

- Alvin E, Roth (1984), The evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents; A Case Study in Game theory. The Journal of Political Economy, 991-1016.

- Alvin E, Roth and Uriel G, Rothblum (1999), Truncation Strategies in Matching Markets-In Search of Advice for Participants. Econometrica, 67, 21-43.

参考文献２

- 坂井豊貴 (2010), マーケットデザイン入門, ミネルヴァ書房.
- 坂井豊貴 (2013), マーケットデザイン, ちくま新書.
- 安田洋介 (2010). 学校選択制のデザイン　ゲーム理論アプローチ, NTT出版.